

目录

Claude 与黎曼猜想：一次“有限维化”突破的事实核查与数学评价	1
摘要	1
一、事件与公开材料	2
二、数学机制：从 Weil 二次型到秩-迹不等式	2
三、逐条核对评论文章	5
四、客观评价	7
五、媒体报道的问题	8
六、结论	9
参考文献	9

Claude 与黎曼猜想：一次“有限维化”突破的事实核查与数学评价

——基于所附评论文章观点的研究报告

调查范围与依据：本报告以用户提供的评论文章为起点，逐条核实其关于 Claude 在黎曼猜想问题上工作的判断。我们下载并阅读了 Anthropic 于 2026 年 8 月 10 日发布的官方博客、Claude 撰写的论文《More Than Two Thirds of the Zeros of the Riemann Zeta Function Lie on the Critical Line》、Anthropic 数学家编写的专家简注、Claude 自述研究过程的附录《How the two-thirds argument was found》、子智能体 E2 的完整转录，以及 Lean 4 形式化仓库 zeta-23-lean；同时查阅了 Bombieri 2000 年论文、Conrey-Li 的 de Branges 正定性论文、Montgomery 1973 年配对论文及 Baluyot-Goldston-Suriajaya-Turnage-Butterbaugh 等人的相关工作。除特别注明外，下文的技术陈述均以一手材料为准。

摘要

评论文章的核心判断可以概括为：Claude 这次的结果看起来是解析数论，但方法上把连续的 Weil 二次型问题压缩成有限维 Gabor 函数空间上的实对称矩阵问题，用 Sylvester 惯性定律、秩-迹不等式和 von Neumann 迹不等式做计数，最终“还是组合数学”；同时，这套方法无法区分“三分之二的零点在临界线上”与“所有零点都在临界线上”，受 $\lambda \leq 1$ 的限制，因而既不能证明也不能证伪黎曼猜想。我们的核查结论是：文章对“不能证明或证伪黎曼猜想”“无法区分 2/3 与全部”“ $\lambda \leq 1$ 是本质限制”的判断与论文原文一致，基本正确；但文章把 Conrey 说成“原始框架”的提出者、把优化窗口说成“比 Conrey 的 $f=1$ 更优的离散权重分配”、把证明过程描述为“求实对称矩阵最大特征值”，与论文不符，属于事实错误或概念混淆。文章最后对媒体报道数值混乱的批评则大体成立。

一、事件与公开材料

2026 年 8 月 10 日, Anthropic 发布研究文章《Learning more about Claude’s mathematical capabilities》, 披露一个未公开发布的研究版 Claude 在挑战黎曼猜想的过程中, 把“黎曼 ζ 函数位于临界线上的零点比例”这一问题的已知下界从 41.6% (即大于 $5/12$) 提高到 67.2%。更精确地说, Claude 论文中的优化常数为 0.6725, 即 67.25%。论文同时给出: 至少 $2/3$ 的零点位于临界线上且为简单零点, 至少 $5/6$ 的零点彼此不同; 在优化测试函数族下, 相应常数分别为 0.6725、0.6725 和 0.83625; 这些结果对固定原特征 Dirichlet L 函数同样成立。

Anthropic 官方描述的研究过程为: 员工 Jarred Sumner 让 Claude“认真尝试黎曼猜想”, 第一轮 Claude 生成并测试了 650 个思路, 全部失败; 第二轮 Claude 在 Claude Code 中协调约 60 个子智能体, 耗时约一天半, 共消耗 3100 万输出 token, 执行 2400 条 Shell 命令, 编写数百个 Python 脚本, 对已知 zeta 零点做了数千次数值检验, 下载 54 篇 arXiv 论文查重, 并由不同子智能体交叉审稿、独立复证。Claude 还主动要求人类数论专家验证。Anthropic 内部数学家 Levent Alpöge 与 Ralph Furman 审阅了论文, Brian Conrey 与 Dan Goldston 两位外部专家在短时间内审阅; Claude 与员工 Eric Easley 合作完成了 Lean 形式化, 并通过标准 comparator 工具。官方同时明确表示: “我们不指望 Claude 使用的技术会导致黎曼猜想的证明。”

需要强调, 评论文章说 Claude“测试了几百个关于测试向量的想法”“寻找一组系数, 让矩阵向量乘法的结果能最大化投影”, 在公开材料中没有对应记录。官方记录是“650 个思路”, 子智能体自述中则有“106 个候选想法的台账”; 没有任何一手材料把失败过程描述为“测试向量”或“矩阵向量乘法投影”。这可能是转述过程中的失真, 我们在下文第三节详细讨论。

二、数学机制：从 Weil 二次型到秩-迹不等式

2.1 问题本身

黎曼猜想要求 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点 $\rho=\beta+iy$ 满足 $\beta=1/2$ 。与之相关但更弱的问题, 是证明“至少多大比例的零点位于临界线上”。历史上, Hardy (1914) 证明临界线上有无限多个零点; Selberg (1942) 证明存在正比例; Levinson (1974) 给出至少 $1/3$; Conrey (1989) 通过改进 mollifier 得到大于 $2/5$; Bui-Conrey-Young (2011) 与 Pratt-Robles-Zaharescu-Zeindler (2020) 逐步把纪录推到大于 $5/12=0.4166$, 并保持到本次工作之前。另一条线来自 Montgomery (1973): 在假设黎曼猜想成立的前提下, 他计算零点序号的配对相关函数, 证明至少 $2/3$ 的零点为简单零点; Montgomery-Taylor 进一步给出 0.6725, Cheer-Goldston、Bui-Heath-Brown、Chirre-Gonçalves-de Laat 等人在 RH 假设下继续推进。Claude 的核心贡献, 是把 Montgomery 论证中“需要 RH 才能读出零点侧”的这一环节替换为纯线性代数, 从而无条件得到 $2/3$ 乃至 0.6725。

2.2 Weil 显式公式与二次型

对紧支光滑测试函数 f, g ，定义

$$W(f, g) = \sum_{\rho} m_{\rho} \hat{f}(\gamma_{\rho}) \overline{\hat{g}(\gamma_{\rho})},$$

其中 ρ 遍历非平凡零点， m_{ρ} 为重数。Weil 显式公式给出 $W(f, g)$ 同时等于一个由 Γ'/Γ 、极点项和素数幂 $n \leq X = e^L$ 上的和构成的积分。Weil 准则说：黎曼猜想成立当且仅当 W 在全体紧支测试函数上半正定。这使 RH 变成一个无穷维泛函分析问题。

Bombieri 2000 年的论文《Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I》正是从这个视角出发：他在 L^2 空间中研究该二次型在单位球上的极小值，将其 Fourier 变换写成无穷多变量的二次型，然后研究有限截断及其特征值；他证明，若 RH 只被有限个离线零点违反，则当截断足够大时，负特征值的数目恰好等于不满足 RH 的零点对数的一半。评论文章说“Claude 引用了 Bombieri 2000 年论文，其中出现了把 Weil 二次型截断为有限维矩阵、研究特征值的性质”，这一点属实，论文第 7.4 节也明确承认：“有限截断的 Weil 形式的负指标等于该截断看到的离线零点对数，这一观察来自 Bombieri”。

2.3 Gabor 压缩与矩阵化

Claude 论文的关键技术步骤是：取 $L = \lambda \log(T/2\pi)$ ，其中 $0 < \lambda \leq 1$ ， $X = e^L = (T/2\pi)^{\lambda}$ ；取固定窗口 ϕ （紧支、光滑、带 taper），构造

$$V = \text{span}\{\phi(u)e^{i\tau_k u} : \tau_k = T + 2\pi k/L, 0 \leq k < d\},$$

其中 $d \approx \lambda N$ ， N 是 $[T, 2T]$ 内零点个数（按重数）。把 W 限制到 V ，得到 $d \times d$ 实对称矩阵 G ，再归一化为 $\tilde{G} = G/L$ 。论文 Remark 1.2 明确说：在时频分析语言中， V 是临界密度下的 Gabor 系统， $\tilde{G}$ 是 Weil 二次型在该系统上的 Gram 矩阵。论文还证明了一条 Poisson 求和恒等式，保证这个临界抽样没有混叠误差。评论文章“把 Weil 公式限制在有限维 Gabor 函数空间”的说法，与论文一致。

2.4 零点侧与素数侧

矩阵 $\tilde{G}$ 可以分解为 $\tilde{G} \approx P + Q$ （略去余项）。 P 来自临界线上的零点：每个不同的线上点贡献一个半正定秩一形式，故 P 半正定且 $\text{rank } P \leq s$ （ s 为不同线上零点个数）。 Q 来自离线零点：由函数方程，离线零点成对出现 $\{\rho, 1 - \bar{\rho}\}$ ，每对贡献一个符号为 $(1, 1)$ 的块；由 Sylvester 惯性定律， Q 的正指标不超过离线零点对数 p 。这就是评论文章说的“在线零点和离线零点对的不同符号贡献”。

素数侧提供两个无条件计算的量： $\text{tr } \tilde{G} \approx N$ ， $\|\tilde{G}\|_F^2 \approx (1/\lambda + \lambda/3)N$ 。前者是 Riemann–von Mangoldt 平均密度，后者是 Montgomery 第一、第二矩；BGSTB24 等人的工作证明这些矩在“所有复数零点”上无条件成立，不需要 RH。论文用到的分析输入正是这些：Weil 显式公式、Stirling 公式、Riemann–von Mangoldt 公式、Chebyshev–Mertens 估计和 Montgomery–Vaughan 广义 Hilbert 不等式；不使用零密度估计、无零点区域或 mollifier。

2.5 秩–迹不等式与结果

论文的线性代数核心是秩–迹不等式：设 P 为半正定 Hermite 矩阵、 $\text{rank } P \leq r$ ， Q 的正指标 $\leq b$ ，则对任意 $c > 0$ ，

$$\|P + Q\|_F^2 \geq c \text{tr } P - \frac{c^2}{4}r + 2c \text{tr } Q - c^2b.$$

取 $c = 2$ 得到 $r \geq 2 \text{tr } P + 4 \text{tr } Q - 4b - \|P + Q\|_F^2$ 。证明的关键是 von Neumann 迹不等式 $\text{tr}(PQ^-) \leq \sum p_i n_i$ 以及 $(x - 1)^2 \geq 0$ ；论文指出，这恰是 Montgomery 论证中整数重数步骤 $m^2 \geq 2m - 1$ 的矩阵版本。把零点侧、素数侧和这个不等式组合，得到 $s \geq H(\lambda)N$ ，其中

$$H(\lambda) = 2 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{3}.$$

当 $\lambda = 1$ 时 $H(1) = 2/3$ ，这就是定理 A。对简单零点用更细的重数分组，得到定理 B 的 $2/3$ ；对“不同零点”用 $m^2 \geq 3m - 2$ 的模拟，得到定理 C 的 $5/6$ 。

2.6 “优化”到底是什么

论文 7.1 节把窗口 ϕ^2 记为 v ，并证明常数由

$$c_\lambda(v) = \frac{(\int v)^2}{\int v^2 + \lambda^2 \iint |s - s'| v(s)v(s') ds ds'}$$

控制。这是正定算子 $1 + \lambda^2 T$ 上的 Rayleigh 商。最大化 c_λ 是一个连续变分问题：Euler–Lagrange 方程是 $v'' + 2\lambda^2 v = 0$ ，最优解为 $v(s) = \cos(\sqrt{2}\lambda s)$ ，对应的 $c_1^* \approx 0.7532960$ ，即 Montgomery–Taylor 常数；最终常数 $2 - 1/c_1^* = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.67250 \dots$ 。论文还引用了 Carneiro–Chandee–Littmann–Milinovich 的极值问题结果，说明在“只使用 $[-1, 1]$ 上 $F(\alpha)$ 的值”这一前提下，任何窗口都不会更好。

这里必须澄清评论文章的两处描述。第一，最优窗口是闭式连续函数，不是“离散权重分配”；数值搜索发生在发现过程中（子智能体 E2-kernel 的账户里），但论文的证明是解析的，附录

也写明“窗口智能体以闭式找到最优——恰好是 Montgomery-Taylor 窗口”。第二，主证明并不计算 $\tilde{G}$ 的最大特征值，也不解 Rayleigh-Ritz 矩阵特征值问题；它只用 tr 、 $\|\cdot\|_{F^2}$ 、秩和正指标。Rayleigh 商只出现在窗口优化的变分问题中，以及 Remark 7.1(ii) 关于不正交化的说明里。所以“把最大化泛函变成求实对称矩阵最大特征值”是把两个不同层面的东西混在一起了。

2.7 方法的天花板

论文第 7.5 节明确列出限制：(a) $\text{rank } P$ 和 $n_+(\tilde{G})$ 都 $\leq d \approx \lambda N$ ，因此带宽 $\lambda \leq 1$ 时，这类方法的证书最多覆盖 λN 个线上点；(b) 仅凭 tr 、 $\|\cdot\|_F^2$ 和块结构，秩-迹不等式在极值配置下是紧的—— $\frac{2}{3}N$ 个互相正交的简单线上零点加 $\frac{1}{6}N$ 个线上二重零点，恰好实现所有等式；(c) 一个显式极值配置说明，只读带宽一数据、逐配置成立的证书最多证明 0.68185 的简单零点比例， $2/3$ 距此天花板只有约 0.016，剩下到 1 的差距是结构性的；要达到 0.70、0.80、0.90，分别需要配对相关信息延伸到 Fourier 支撑约 1.04、1.26、1.70，超出了已知范围；(d) $\lambda \leq 1$ 是本质的——对 $X \gg T^l$ ，素数侧的非对角项不再被对角项控制，其求值需要 Hardy-Littlewood 型素数对信息（等价于 $\alpha > 1$ 时的 Montgomery 配对猜想）。评论文章说“需要 $\lambda \leq 1$ ，这是由解析数论（素数均值定理）的边界决定的”，方向正确；更准确的表述是：这是 Montgomery-Vaughan 均值定理与对角法适用范围的边界，越过它就需要素数对猜想级别的输入。

论文还明确写道：“该方法在任一方向上与黎曼猜想无关。”输入是长度 $\square T$ 的 Dirichlet 多项式的均值，对 $o(N)$ 个离线零点不敏感，并且 Davenport-Heilbronn 函数、类数大于 1 的 Epstein zeta 函数等 RH 为假的对象也满足这些输入。因此，证书只能证明“至少有 $2/3$ 的零点不是离线配对那种极端配置”，无法区分“ $2/3$ ”与“全部”。评论文章“新方法无法区分 $2/3$ 和全部”“如果要证明或证伪黎曼猜想，这次展示的方法不能用”的判断，与论文原文完全一致。

三、逐条核对评论文章

评论文章的说法	核查结果
丘成桐说 AI 数学成果大多是组合数学，他不关心	未能通过公开检索核实这句引言；建议以原访谈或视频为准。作为方法论判断，下文单独讨论。

评论文章的说法	核查结果
“Conrey 的原始框架是泛函分析”	不准确。论文中的 Weil 二次型框架来自 Weil、Bombieri、Yoshida；配对矩来自 Montgomery；无条件素数侧矩来自 BGSTB24 与 Goldston–Suriajaya。Conrey 在论文中的角色是 1989 年 Levinson 型结果 ($\kappa>2/5$) 的作者，以及受邀审稿人。Conrey–Li 1998 年的论文确实研究 Hilbert 空间正定性 (de Branges 框架)，但 Claude 论文没有采用它。
“比 Conrey 的 $f=1$ 更优的离散权重分配”	混淆。平窗口 $v \equiv 1$ 给出 $F(\lambda) = \lambda/(1 + \lambda^2/3)$ ，是 Montgomery 泛函的旧输入，不是 “Conrey 的 $f=1$ ”；优化窗口是 Montgomery–Taylor 连续余弦窗口，且 1975 年已知。Claude 的新意不是找到更优权重，而是把这个已知最优窗口的结论变成无条件证明。
“把 Weil 公式限制在有限维 Gabor 函数空间”	准确。论文 Remark 1.2 正是这样说的。
“将复杂的泛函变成 Rayleigh–Ritz 商、求实对称矩阵最大特征值”	部分不准确。窗口优化确实是连续 Rayleigh 商，但有闭式解；主证明使用秩–迹不等式，不计算最大特征值。
“测试了几百个关于测试向量的想法，让矩阵向量乘法结果最大化投影”	公开材料不支持。官方记录是 650 个解题思路；子智能体台账是 106 个候选。没有 “测试向量/矩阵向量乘法投影” 的一手记录。
“约 60 个子智能体、数千条 Shell 命令、数百个脚本、数千次数值检查”	准确，与 Anthropic 博客一致。
“新方法无法区分 $2/3$ 和全部”	准确，论文原文 “Nothing in the method distinguishes between ‘two thirds’ and ‘all’”。
“需要 $\lambda \geq 1$ ，由素数均值定理的边界决定”	方向正确；准确表述见 2.7(d)。
“方法不能证明或证伪黎曼猜想”	准确。论文 1.5 节 “What the results are not” 和附录中 “zero evidence about RH in either direction” 都明确这么说。
“最终还是组合数学”	有合理内核，但失之偏颇。见下节。

四、客观评价

4.1 这是真实的数学贡献吗？

是。虽然论文的每个“零件”——Weil 显式公式、Bombieri 截断、Montgomery 配对矩、Gabor 系统、线性代数不等式——都是已知的，但把它们组装成“无条件把 Montgomery 的 $2/3$ 从 RH 假设下解放出来”的证明，是新的。此前 41.6% 的纪录通过 Levinson 方法保持了多年；Claude 给出一个完全不同、不使用 mollifier 和零密度估计的证明，并把常数从 $2/3$ 推到 Montgomery-Taylor 的 0.6725，同时给出 $5/6$ 的“不同零点”比例、Dirichlet L 函数版本，以及对方法本身的极值天花板分析 (0.68185)。这些结果已经过 Anthropic 内部数学家验证、两位外部专家审阅，并有 Lean 4 形式化版本（定理 A-E 无 sorry，只依赖 Lean 的三个标准公理）。尽管尚未经过完整学术同行评审，证据链的强度在 AI 产出的数学中属于最高一档。

需要补充的是，独立社区已经有人复现并延伸了这一结果：一个公开仓库 (ainta/zeta-simple-zeros) 声称用“连续 3 个零点/7 个零点的稳定性精化”把简单零点比例推到 67.30085%。这至少说明论文的核心机制可以独立验证，也说明围绕该结果的研究生态已经形成。

4.2 局限是方法性的，不是“还没算够”

评论文章把 67.2% 与 100% 之间的差距理解为方法不能触及，而不是算力不足，这个判断是对的。论文证明：只使用带宽一数据、块结构和前两阶矩，任何证书最多做到约 0.68185；而要把常数推高，必须引入更高阶矩或更宽的 Fourier 支撑，前者在无条件框架下被证明无用或不存在，后者需要素数对猜想。换句话说，Claude 的方法不是“再算一点就能到 100%”，而是“在这条路上被自己的输入信息边界卡死”。这与“黎曼猜想仍未被证明”是同一个事实的两面，但比单纯的“未证明”精确得多。

4.3 “组合数学”标签的公允性

评论文章说“最终这还是他奶奶的组合数学”，这是全篇最有修辞效果、也最容易误导的一句话。它有三成道理：证明的最终落点确实是有限维实对称矩阵上的计数——秩、正指标、特征值的数量关系、极值配置，这些确实是离散/组合/线性代数味道很重的内容；而且与经典函数空间上的泛函分析相比，Claude 的证明确实更“有限”。但把它归为组合数学，会掩盖三件事：第一，素数侧的两个矩 ($\text{tr } \tilde{G}$ 和 $\|\tilde{G}\|_{F^2}$) 是解析数论中最难的部分，论文的定理 A-E 的实质内容都在那里；第二，有限维化本身不是“把问题变成组合优化”，而是利用 Gabor 系统的抽样恒等式做无损压缩，这仍是调和分析；第三，最优窗口是连续变分问题的解析解，不是离散搜索的结果。更公允的说法是：Claude 用有限维线性代数替换了 Montgomery 论证中需要 RH 的“逐项正性”环节，把解析数论的一个下界问题翻译成矩阵计数问题，并在翻译后的世界里证明了紧的最优性。说它“主要是组合/线性代数的胜利”可以商榷，说它“是组合数学”则太小看它背后的解析输入。

顺带说一句“丘成桐引言”：我们未能检索到这句话的原文，因此不对其真伪表态。但若把“AI 数学成果大多是组合数学”理解为“AI 更擅长把问题转成有限、离散、可搜索的形式”，那么本次结果确实提供了部分支持——只是它同时证明，即使转化成功，解析数论仍为这套方法划定了不可逾越的输入边界。

4.4 对 AI 科研模式的启示

这次事件最值得注意的也许不是 67.2% 本身，而是研究过程的组织方式：650 个初始想法失败，60 个子智能体分工、互审、查重、复证，31M token 的算力投入，最后模型自己建议人类验证。它说明当前 AI 已经能够做“大规模组合式搜索 + 已知工具重组 + 自动验证”的科研流水线，也说明这种流水线离“独立发现深刻新结构”还有距离：最终的关键引理（秩-迹不等式）虽然是模型提出的，但它的思想来源（ $m^2 \square 2m \square 1$ 、Bombieri 截断、Montgomery 矩）全部来自人类数学，且每一步都有人类专家兜底。Claude 自己在附录中声明，附录中的过程叙述“未经独立验证”；这意味着关于“AI 如何想到”的故事，其可信度低于论文本身。媒体如果把过程叙事当作结果宣传，会放大 AI 的拟人化程度。

五、媒体报道的问题

评论文章最后问：“报道此事的媒体还普遍连数值都没搞清楚，他们为什么不让 Claude 帮他们写他们看不懂的话题的新闻稿呢？”这个批评有事实基础。我们检索到的中文报道中，有的标题写“Claude 攻克黎曼猜想取得重大突破”“Claude 破解黎曼猜想”，而官方明确说没有证明；有的把下界写成 67.25% 而标题写 67.2%，混用口径；有的说“此前 37 年仅推进 0.8%”，若从 Conrey 1989 年的 40.88% 算到 PRZZ 2020 年的 41.6% 左右，确实约 0.8 个百分点，但严格说是 31 年（1989 到 2020），且“0.8%”应写作“0.8 个百分点”，不少报道把百分比与百分点混用；还有报道把“至少 $2/3$ 的零点在线上”渲染成“黎曼猜想完成了 67.2%”，这是概念错误。更隐蔽的问题是，很多报道把“650 个思路失败”“60 个子智能体”“3100 万 token”当作成果本身，而没有解释这些数字在数学上没有任何意义——数学成果的含金量只由证明的正确性和新意决定。

“让 Claude 写新闻稿”并不能解决这个问题：模型擅长生成通顺文本，但同样擅长复述和美化错误数字，尤其在没有一手核对链时。正确的做法是让懂数论的人（或至少核对论文原文和 Lean 仓库的人）审校数字与结论，并在标题中区分“证明”“改进下界”“形式化验证”三个层级。本次事件的教训是：AI 可以做科研的很大一部分，但媒体素养的缺口不能由另一个 AI 自动补上。

六、结论

评论文章的核心判断——Claude 的方法无法证明或证伪黎曼猜想、无法区分 $2/3$ 与全部、受 λ_01 限制、本质上是有限维矩阵计数——与论文原文高度一致，说明作者对数学结构有相当准确的理解。但文章在几个具体归属上失真：Conrey 不是这套框架的“原始提出者”，“ $f=1$ ”与“离散权重”的说法混淆了 Montgomery 平窗口与 Montgomery-Taylor 连续优化窗口，主证明也不涉及“求最大特征值”。Claude 这次的确做出了真实的、可验证的、有方法学意义的数学进展：把 Montgomery 配对论证无条件化，把零点比例下界从 41.6% 推到 67.25%，并给出 $5/6$ 的相异零点比例和严格的极值天花板。它是“AI 重组已知数学工具产生新定理”的教科书案例，也是“媒体如何把一个严肃结果讲成爽文”的反面教材。对读者而言，最可靠的信息源仍是论文本身与 Lean 形式化仓库，而不是任何标题。

参考文献

1. Anthropic, *Learning more about Claude's mathematical capabilities*, 2026-08-10. <https://www.anthropic.com/research/riemann-zeta>
2. Claude (Anthropic), *More Than Two Thirds of the Zeros of the Riemann Zeta Function Lie on the Critical Line*, 2026. <https://www-cdn.anthropic.com/564f962e60643842f5fcb4a17c90>
3. Anthropic, *How the two-thirds argument was found: two agent runs and their literature*, 2026. <https://www-cdn.anthropic.com/d7f3ecf1d01392d887f8bc974ca187e2a121b1ed.pd>
4. Levent Alpöge, Ralph Furman, *67% of the zeroes are on the line* (专家简注), 2026. <https://www-cdn.anthropic.com/23455459f8832d06bb175cc0f88d019aed962ef8.pdf>
5. Anthropic, *Zeta23 — a Lean 4 formalization*, GitHub. <https://github.com/anthropics/zeta-23-lean>
6. E. Bombieri, *Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 11 (2000), 183–233.
7. A. Weil, *Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sémin. Math. Univ. Lund (1952), 252–265.
8. H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Sympos. Pure Math. 24 (1973), 181–193.
9. H. L. Montgomery, *Distribution of the zeros of the Riemann zeta function*, Proc. ICM Vancouver 1974, vol. 1 (1975), 379–381.
10. S. A. C. Baluyot, D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, C. L. Turnage-Butterbaugh, *An unconditional Montgomery theorem for pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function*, Acta Arith. 214 (2024), 357–376.
11. D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, *Zeta zeros on the critical line*, arXiv:2511.20059 (2025); *Zeta zeros in a narrow vertical box*, arXiv:2603.28104 (2026).
12. J. B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. 399 (1989), 1–26.

13. H. M. Bui, B. Conrey, M. P. Young, *More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line*, Acta Arith. 150 (2011), 35–64.
 14. K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu, D. Zeindler, *More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line*, Res. Math. Sci. 7 (2020), Paper No. 2.
 15. J. B. Conrey, X.-J. Li, *A note on some positivity conditions related to zeta and L-functions*, arXiv:math/9812166.
 16. ainta, *zeta-simple-zeros: reproducible verification for a 67.30085% lower bound*, GitHub, 2026.
-

报告完成日期：2026 年 8 月 12 日。本报告为独立核查，不隶属于 *Anthropic*；文中所引英文材料均为公开可查的一手来源。

【正文完】