

MATHEMATICS / 2026 FIELDS MEDAL

约翰·帕登因在辛几何领域的开创性工作荣获2026年菲尔兹奖

约翰·帕登能够洞察到其他人未能觉察的、跨越不同数学领域的深刻联系。凭此非凡远见，他被授予数学界的最高荣誉——菲尔兹奖。

作者：Konstantin Kakaes (Quanta Magazine 资深编辑)

发布时间：2026年7月23日



约翰·帕登（John Pardon）在黑板前。因在辛几何、纽结理论及代数几何领域的里程碑式突破，他荣获2026年菲尔兹奖。（摄影：Phil Yam / Quanta Magazine）

2012年，约翰·帕登（John Pardon）在一次晚宴上坐在普林斯顿大学著名数学家亚诺什·科拉尔（János Kollár）身边。当时帕登还是大四本科生，而科拉尔则是资深教授。科拉尔问帕登最近在研究什么。

帕登回答说，他正在研究辛几何中的“虚循环问题”（virtual cycle problem）。科拉尔大吃一惊。该问题是这个极其抽象的数学领域中著名的瓶颈难题，很难想象一名本科生能在其上取得突破。

“我当时并没有太当真，”科拉尔回忆道，“你知道的，本科生总是尝试各种各样的难题。”

两年后，当帕登成为斯坦福大学的研究生时，他发表了一篇长达200页的论文，完整证明了这一难题。这奠定了他在全球最杰出的青年数学家中的卓著声誉。

如今，因这项开创性成果以及后续一系列重大突破，现年36岁的帕登被授予数学界的最高荣誉——菲尔兹奖（Fields Medal）。

“约翰是一位非凡的数学家，”帕登在斯坦福大学的博士导师雅科夫·埃利亚什贝格（Yakov Eliashberg）评价道，“他拥有非凡的天赋，能够洞察宏大格局，并找到恰当的数学语言来解决极其深奥且悬而未决的立论。”

帕登以沉静和低调闻名。他不运营个人网站，不举办夸张的热门讲座，也极少谈及自己。

“他总是言简意赅。他非常深思熟虑。每次发言，字字珠玑。”

—— 托马斯·马索尼（Thomas Massoni），斯坦福大学数学家

“我认为约翰很清楚自己的定位，并且完全不想表现得自夸，”曾在普林斯顿指导帕登本科毕业论文的数学家戴维·加拜（David Gabai）补充道。

正如体育界的世代奇才——大谷翔平、乔丹、梅西——帕登以独特的风格对待他的学科，使他在顶尖数学家中依然独树一帜。

因此，在尽量避免公式化刻画的前提下，以下展示了帕登在纽结理论、辛几何以及代数几何领域的代表性成果。

一、纽结非难事：攻克格罗莫夫失真猜想

当帕登在晚宴上坐在科拉尔身边时，他已经是普林斯顿数学系的明星学生。进入大学后，他着手解决一个高中时期首次接触的纽结理论未解难题：格罗莫夫失真猜想（Gromov's distortion conjecture）。

“这是一篇你可以坐下来细细品读的论文，散发着天才般的光芒。”

—— 凯·齐利巴克（Kai Cieliebak），奥格斯堡大学数学教授

纽结理论是数学中直观却极其深奥的领域之一。数学家研究三维空间中封闭的绳圈，探索两个纠缠的绳圈是否能在不断开绳子的前提下通过连续变形相互转化。

1983年，著名数学家米哈伊尔·格罗莫夫（Mikhael Gromov）提出了关于纽结“失真度”（distortion）的猜想，失真度用于度量纽结扭曲的紧密程度。

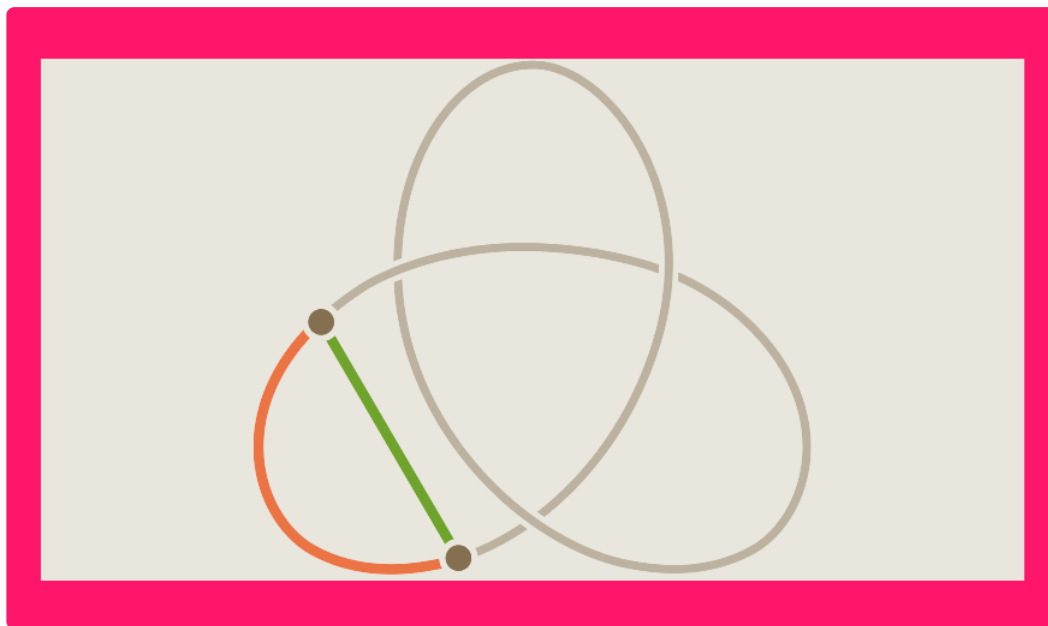


图 1：格罗莫夫失真猜想（Gromov's Distortion Conjecture）。上图展示了空间中纽结的失真度定义（绳路上距离与空间几何距离之比）。帕登证明了一类环面纽结的失真度随复杂度无限增长。（图源：Mark Belan / Quanta Magazine）

纽结具有柔韧的特性：只要不撕断绳子，就可以将其扭曲成无穷无尽的形状。格罗莫夫询问，是否可以构造出一个纽结，其几何形态使得绳子上的两个点在三维空间中彼此非常靠近，但沿着绳子本身的路径距离却极其遥远。

格罗莫夫想知道，当把绳子在圆环面（doughnut）上缠绕越来越多圈、使纽结变得越来越复杂时，其失真度是否必然无界增长。

加拜回忆说，2010年的某一天，当时还是本科生的帕登走进他的办公室，平静地表示自己证明了格罗莫夫失真猜想。

由于失真度是衡量纽结缠绕程度的指标，帕登本质上证明了在几何意义上确实可以打出任意“复杂缠绕”的纽结。

齐利巴克感叹道：“这是一篇你可以坐下来细细品读的论文。它带有一种天才般的触觉。”

二、横截之光：解决辛几何“虚循环”危机

如果说纽结失真论文是帕登大学生涯的毕业致辞，那么他才刚刚踏上征程。最初，帕登从事低维拓扑学中一些问题的研究。随后，在向埃利亚什贝格请教后，他转向了辛几何与虚循环问题。

“他不仅解决了一个著名难题，更以一种构建全新框架和工具包的方式去解决它，这将使未来数十年的研究受益。”

——托比亚斯·埃克霍尔姆（Tobias Ekholm），乌普萨拉大学教授

在数学学科网络中，辛几何介于拓扑学与经典几何学之间，在经典力学和物理学中有着深厚的渊源。位置与动量以特定的数学方式相互关联：改变其中一个，另一个随之改变。辛流形在高维空间中捕捉并抽象了这种深刻关系。

帕登关于“虚循环问题”的博士论文让他瞬间在辛几何学家中名声大噪。要理解虚循环问题，有助于理解所谓的“横截性”（transversality）概念。平面上的两条曲线如果以清晰的非零角度干净利落地相交，则称它们为横截相交。

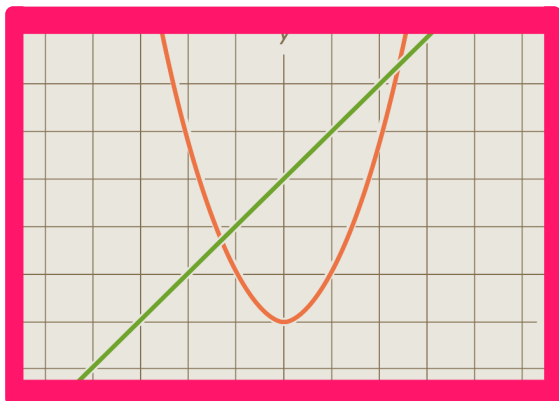


图 2：横截相交（Transverse Intersection）。曲线以清晰角度相交，交点数量在微小扰动下保持稳定。

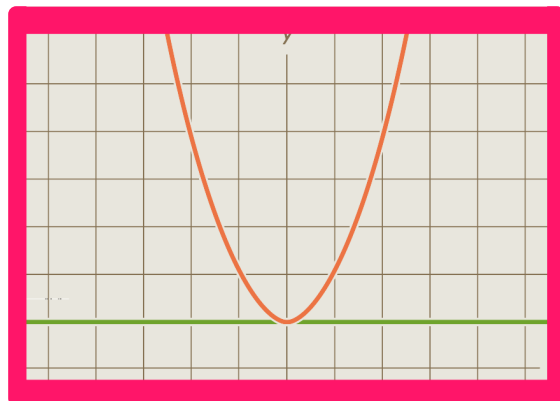


图 3：非横截相交（Non-transverse Intersection）。切线接触导致交点对扰动极敏感。

反之，如果它们只是勉强相切“吻合”，那么它们的交点就是非横截的，微小的扰动就会剧烈改变交点的数量。横截与非横截相交也同样出现在曲面及高维辛流形中。

在辛几何中，基本的研究对象称为辛流形。数学家提取不变量的核心途径之一，就是在这些流形内部对伪全纯曲线进行计数。然而由于缺少横截性，计数的基石长期以来缺乏严格说明。

在博士论文中，帕登成功开发了一种全新的数学语言，克服了非横截性障碍，为虚基本循环构造了严密的代数与拓扑基础。这一成果诞生于辛几何基础面临严峻信任危机的关头。帕登的工作恢复了整个领域坚实严密的理论基石。

正如埃利亚什贝格在斯坦福的同事穆罕默德·阿布扎伊德（Mohammed Abouzaid）所言，帕登的论文“让许多几何学家终于能在夜晚安心入睡”。



学者风采：破格获评终身正教授

为表彰帕登博士论文的巨大影响，在他正式获得博士学位之前，普林斯顿大学即向其授予了终身正教授职位——这在二十多岁的青年学者中极为罕见。

毕业后不久，帕登又与 Sheel Ganatra 和 Vivek Shende 合作证明了辛拓扑学中关于 Fukaya 范畴的核心猜想。

三、曲线计数：证明悬决20年的 MNOP 猜想

2016年，帕登离开斯坦福返回普林斯顿任教六年，随后加盟石溪大学西蒙斯几何与物理中心。在那里，他攻克了迄今为止最重大的难题：证明了一个悬决长达20年的曲线计数猜想。

与辛几何类似，曲线计数赋予了数学家对曲线所在空间的深刻洞察。在平面上给定两点，只能画出一条直线。尽管在二维平面或三维空间中可以画出无数条直线，但代数几何中有一个经典定理：被称为“五次三维多体”（quintic threefold）的六维空间中恰好包含 2,875 条直线。

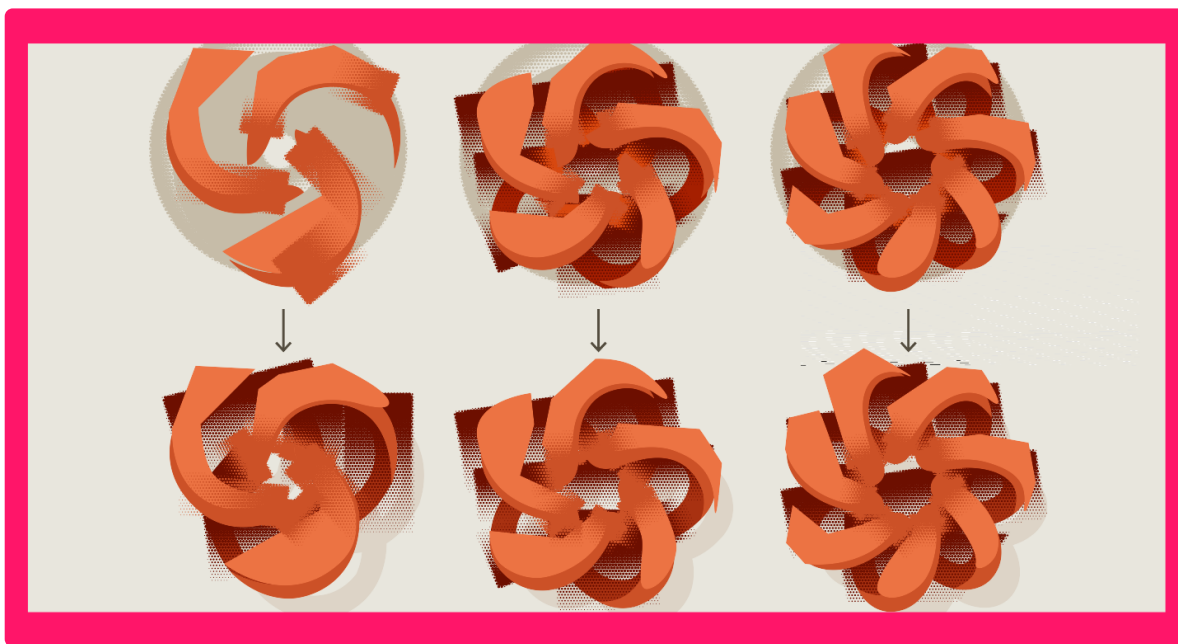


图 4：MNOP 猜想的几何与代数对偶。图示说明了格罗莫夫-威滕（Gromov-Witten）不变量与唐纳森-托马斯（Donaldson-Thomas）不变量如何通过底层配分函数统一在一起。（图源：Mark Belan / Quanta Magazine）

五次三维多体是一类被称为卡拉比-丘流形（Calabi-Yau manifold）的六维空间示例，它不仅在数学上令人着迷，在弦理论和理论物理学中也至关重要。许多弦理论模型预测，物理世界额外的6个维度蜷缩在微观的卡拉比-丘流形中。

卡拉比-丘流形至今尚未被完全理解。2003年，三位数学家和一位物理学家提出了 MNOP 猜想，指出在卡拉比-丘流形上对曲线进行计数的两种截然不同的方法在深层维度上完全等价。

对于给定的卡拉比-丘流形，数学家希望跨越不同的亏格（genus 0, 1, 2...）同时对多类曲线进行计数。通常由于技术障碍无法直接计数，数学家转而利用一系列被称为“虚”曲线计数的无穷数列。

不列颠哥伦比亚大学数学家吉姆·布莱恩（Jim Bryan）指出，这两套不变量分别是格罗莫夫-威滕（Gromov-Witten）不变量与唐纳森-托马斯（Donaldson-Thomas）不变量。前者按亏格分类计数，后者按几何结构组织计数。两者在数学形式上看似毫无关联。

然而，MNOP 猜想断言，它们实际上对应于同一个底层函数——配分函数（partition function）的不同展开系数。如果能证明其正确性，就意味着两套不变量本质上在对同一种物理与几何实体进行计数，从而将数学家拥有的工具直接翻倍。

数值实验一：零维 DT 配分函数与 MacMahon 乘积收敛 $(M(-q))^X$

3D Box Stacking (DT 0-Degree Sheaf)
Plane Partition Weight $n = 1$



Formula 1: MacMahon Product Convergence $Z_{DT,0}(q) = M(-q)^X$
[Order $N = 1$]

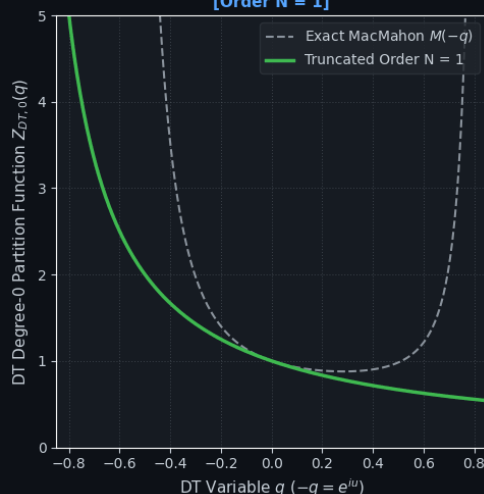


图 5: MacMahon 函数与 3D 平面剖分（点状 Ideal 束）几何收敛实验动画

【实验一解读指南与机制分析】

公式背景：公式一为零维 Donaldson-Thomas (DT) 配分函数与 MacMahon 函数的关系式： $Z_{\{DT,0\}}(q) = M(-q)^{\chi(X)}$ 。其中 MacMahon 函数 $M(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-n}$ 是三维平面剖分 (3D Plane Partition) 的生成函数。在 DT 理论中，零维 Ideal 束的欧拉特征数计数完全等价于在卡拉比-丘三维样条上的点处叠加三维立方体。

如何观察左侧 3D 动态图：

1. 观察箱体堆叠结构：左图展示了随着组合数 n （从 1 逐渐增加到 15）在空间直角坐标角落中堆叠的三维箱体 (Voxel)。每一个箱体代表一个高维代数几何中的基本点状理想束构形。
2. 几何约束与递减律：注意观察箱体在三个轴向上的递减排列，这体现了平面剖分的严密代数条件 $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i+1,j}$ 。动画通过视角旋转让开发者直观看到，离散的拓扑几何状态是如何随权重阶数逐渐变得复杂庞大的。

如何观察右侧 2D 函数收敛图：

1. 虚线与实线对比：灰色虚线代表非自治理论精确的 MacMahon 乘积曲线 $M(-q)$ ，绿色实线代表对无穷乘积进行前 N 项截断的数值近似结果。
2. 动态收敛过程：随着动画播放，右上角显示的截断阶数 N 从 1 逐步提升至 2, 3, 5, 8, 12, 20, 35。可以清晰看到绿色曲线在 q 属于 $(-0.85, 0.85)$ 区间内极速贴合灰色虚线。
3. 边界奇异性特征：在 q 接近 -1（即 u 趋近于 0 的强耦合极限点）时，乘积项的加入使得函数呈现出极强的非扰动奇异性。

核心结论：该动画直观揭示了离散组合计数（3D 积木堆叠）如何精确重构出连续的拓扑弦零维配分函数。

数值实验二：GW/DT 变量代换与非自洽对偶映射 ($q = -e^{-u/2}$)

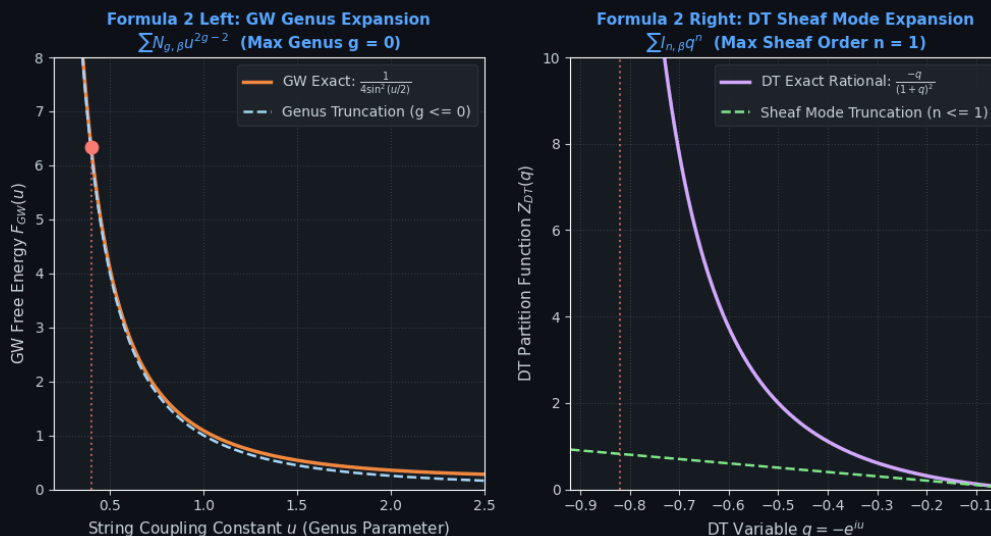


图 6: Gromov-Witten 亏格展开与 Donaldson-Thomas 理想束模式映射数值实验动画

【实验二解读指南与机制分析】

公式背景：公式二为 Gromov-Witten (GW) 拓扑弦与 Donaldson-Thomas (DT) 理想束在曲线类上的映射对偶公式： $Z_{DT}(q, \hbar, \text{ta}) / Z_{DT,0}(q) = Z_{GW}^{\text{prim}}(u(q), \hbar, \text{ta})$ ，其关键参数变量代换为 $q = -e^{-u/2}$ （或 $u = -2 \ln(-q)$ ）。针对最基本的 1 阶曲线类，GW 侧对应亏格展开级数 $F_{GW}(u) = 1 / (4 \sin^2(u/2))$ ，而 DT 侧对应有理分式 $Z_{DT}(q) = -q / (1+q)^2$ 。

如何观察左图（GW 亏格展开域）：

1. 亏格级数叠加：橙色实线为精确的非自洽弦自由能曲线 $1/(4 \sin^2(u/2))$ ，蓝色虚线代表按亏格 g 进行渐近展开截断的级数 $\sum N_{g,\beta} u^{2g-2}$ 。
2. 阶数演化：随着动画推进，亏格阶数从 $g=0$ （黎曼球面）逐步扩展到 $g=1, 2, 3, 4$ 。可以看到在弦耦合常数 u 较小的区域，低亏格项占主导；随着 u 增大，高亏格修正项迅速填补差距，逼近非扰动曲线。

如何观察右图（DT 理想束模式域）：

1. 模空间代数展开：紫色实线为精确的 DT 有理分式 $-q/(1+q)^2$ ，绿色虚线为理想束欧拉数阶数 n 的多项式截断 $\sum I_{n,\beta} q^n$ （当前最大截断阶数 n 从 1 增加到 20）。
2. 幂级数收敛：在 q 属于 $(-0.92, -0.05)$ 的实轴区间内，随着高阶理想束模式 n 的加入，多项式级数展现出标准的泰勒/洛朗级数逼近有理函数的动态轨迹。

如何观察两图联动的动态扫描红点：动画中左右两图均有一个红点与垂直虚线在协同移动。红点在左图 u 坐标与右图 q 坐标上的对应关系严格遵循 $q = -\exp(-u/2)$ 。这直观证明了连续的弦世界

面映射（GW）与离散的代数束结构（DT），本质上只是同一个物理/几何实体在不同参数域下的等价表达，验证了工具“直接翻倍”的数学物理精髓。

二十年来，该猜想悬而未决。直到2023年夏天，帕登在网上公开发布了完整的证明。为了证明两者的等价性，帕登开创了全新的数学结构——如今被称为“帕登代数”（Pardon algebra）。布莱恩赞叹道：“这是过去20年开列代数几何领域最重要的里程碑成果。”

四、巨著铸基：重塑辛几何的数学语言

帕登目前正在撰写一部关于辛几何基础的巨著，并将手稿草案在网上公开发布。

书的序言体现了帕登对自己工作的谦逊与外界对其崇高评价之间的反差。帕登写道：“有趣的内容分布得有些稀疏”，他希望能“提出尽可能简洁朴实、触手可及的命题与证明”。

该书利用更高阶范畴论（higher category theory）的思想重新重构了辛几何的基础。“约翰从不畏惧庞大的代数机械或抽象概念，”阿布扎伊德表示，“他驾驭它们，关键在于其背后蕴含着极其深刻的几何直觉。”

“最核心的工作在于寻找‘正确’的形式化体系，一旦找到，证明就会顺理成章、水到渠成，”帕登在序言中写道。这些成果绝非平凡，它们重塑了现代几何学的格局。

编者按：石溪大学西蒙斯几何与物理中心由西蒙斯基金会资助，该基金会亦为《Quanta Magazine》提供独立资助。基金会的资助决策不影响本刊的编辑独立性。