

有限规则、无限对象与物理正则化

从发散级数、马德隆常数、量子场论重整化到连续统假设的比较研究

摘要

“只有按照某种规则或顺序求和，才能得到一个收敛值”这一观察，触及了现代数学与理论物理中的一个重要结构：

当一个无限对象的通常极限不存在，或者极限依赖逼近路径时，单独给出形式表达式并不足以决定结果；还必须说明求和方式、截断方式、边界条件、解析延拓或重整化条件。

发散级数、晶体的马德隆常数以及量子场论的重整化，都不同程度地体现了这一点。它们说明，无限对象的“值”有时不是裸表达式自身携带的，而是“表达式加定义程序”共同确定的。

不过，这些问题不能简单归结为同一种“有限思维处理无限”的错误。它们分别属于不同层次：

问题	原始困难	补充结构
发散级数	普通部分和无极限	广义求和或解析延拓
马德隆晶格和	条件收敛、形状依赖	截断形状、边界条件、Ewald 求和
量子场论	圈积分发散、尺度依赖	正则化、反项、实验匹配、重整化群
连续统假设	ZFC 不能决定真值	新公理或不同集合论模型

它们在哲学上存在共同结构，但技术机制并不相同。

一、首先澄清：正整数之和不是普通意义下的负十二分之一

常见的正则化公式是

$$1 + 2 + 3 + \dots \stackrel{\zeta\text{-reg}}{=} -\frac{1}{12},$$

而不是正的 $1/12$ 。

这个等式绝不能解释为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + 2 + \dots + N) = -\frac{1}{12}.$$

普通部分和为

$$S_N = \frac{N(N+1)}{2} \longrightarrow +\infty.$$

所以在通常意义下， $1 + 2 + 3 + \cdots$ 明确发散到正无穷，没有有限的普通和。

$-1/12$ 的准确含义是：黎曼 zeta 函数首先在 $\operatorname{Re} s > 1$ 定义为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

然后唯一解析延拓到更大的复平面，并在 $s = -1$ 处满足

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

因此，严格写法应当是“zeta 正则化值为 $-1/12$ ”，而不是“不加限定的普通和等于 $-1/12$ ”。

二、有限代数进入无限过程时，确实需要额外条件

有限和满足结合律、交换律，并允许拆分、重排和逐项相减。这些规则在有限情形下成立，是因为全部运算只涉及有限多个对象。

无穷级数的定义却包含一个新的操作：取极限。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n.$$

一旦极限出现，交换顺序、拆分级数、交换两个极限、交换求和与积分，都需要额外条件。绝对收敛、控制收敛、一致收敛等定理，正是为了说明什么时候有限代数可以合法延伸到无限过程。

所以问题不是“有限规律在无限中全部失效”，而是：

有限规律延伸到无限时，需要满足额外的连续性、收敛性和不变性条件。

例如，条件收敛级数可以因重排而改变结果。Riemann 重排定理甚至表明，一个条件收敛的实级数可以通过重排收敛到任意指定实数，或者变得发散。

这并不是同一个级数神秘地拥有多个和。严格来说，级数包含顺序，重排后的

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

已经是另一个有序极限过程。

因此，你的直觉可以翻译成一个准确的数学结论：

有限和的全部代数性质，不可能无条件地推广到所有无穷序列。

三、为什么不存在保留一切性质的“万能求和法”

假设我们希望广义求和算子 $\mathcal{S}$ 同时满足线性：

$$\mathcal{S}(a+b) = \mathcal{S}(a) + \mathcal{S}(b),$$

以及普通平移律：

$$\mathcal{S}(a_0, a_1, a_2, \dots) = a_0 + \mathcal{S}(a_1, a_2, \dots).$$

设

$$x = \mathcal{S}(1, 2, 3, \dots), \quad u = \mathcal{S}(1, 1, 1, \dots).$$

由平移律和线性，

$$x = 1 + \mathcal{S}(2, 3, 4, \dots) = 1 + x + u,$$

所以 $u = -1$ 。

但对常数序列再次使用平移律：

$$u = 1 + u,$$

于是得到 $0 = 1$ 。

这说明，任何给 $1 + 2 + 3 + \dots$ 赋有限值的方法，都不可能在一个足够大的、对线性组合和平移封闭的定义域上，完整保留普通求和的全部规则。

它必须至少做一件事：

1. 限制适用对象；
2. 修改平移规则；
3. 放弃某些代数操作；
4. 操作带参数的函数族，而不是裸序列；
5. 规定怎样减去发散部分。

这正是“有限运算法则是否被不恰当地推广到无限对象”这一疑问的技术核心。

四、不同广义求和法不是同一种算法的不同版本

1. Cesaro 求和

Cesaro 求和对部分和再取平均。例如

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

的部分和在 1 和 0 之间振荡，但平均值趋向 $1/2$ ，因此它在 Cesaro 意义下可和到 $1/2$ 。

然而， $1 + 2 + 3 + \cdots$ 的 Cesaro 平均仍然按照 N^2 增长，因此没有 Cesaro 和。

2. Abel 求和

Abel 求和考察

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n, \quad 0 \leq r < 1,$$

再令 $r \rightarrow 1^-$ 。对正整数序列，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2} \rightarrow +\infty.$$

所以它也没有有限 Abel 和。

3. Borel 求和

标准 Borel 求和先构造

$$\widehat{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n,$$

然后计算相应的 Laplace 积分。对于 $a_n = n$ ，该积分仍然发散。因此，正整数级数在标准 Borel 意义下也不可和。

所以 $-1/12$ 不是 Cesaro、Abel 和标准 Borel 方法共同发现的某个“真正和”，而是特定解析延拓或有限部分规则所得的值。

解析延拓本身具有唯一性，但要注意：唯一性发生在已经选择了函数族以后。把裸序列嵌入哪个解析对象，并不总是由裸序列唯一决定。

最准确的说法是：

有限值来自“级数加正则化结构”，而不只来自裸级数。

五、负十二分之一是否只是人为游戏

它不是纯粹的符号游戏，但也不是普通和。

令

$$F(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n}.$$

当 $\varepsilon > 0$ 时它收敛，并且

$$F(\epsilon) = \frac{e^{-\epsilon}}{(1 - e^{-\epsilon})^2} = \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} + O(\epsilon^2).$$

当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时，整体仍然发散；但减去主导发散项 $1/\epsilon^2$ 后，留下常数项 $-1/12$ 。

这说明 $-1/12$ 可以解释为某种渐近展开中的有限部分。它会在 Casimir 效应、弦论谱以及算符行列式等问题中自然出现。

关键不是“正整数真的加成负数”，而是：

不同调节方法在满足相同对称性、解析性和局域性条件时，可能抽取出相同的有限不变量。

六、马德隆常数：求和顺序就是晶体怎样长大

以 NaCl 为例，马德隆常数形式上写为

$$\alpha = - \sum_{(l,m,n) \neq (0,0,0)} \frac{(-1)^{l+m+n}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = 1.7475645946 \dots$$

相应晶格能包含

$$U = - \frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

这个三维晶格和不是绝对收敛的。半径 R 附近的壳层约有 R^2 个格点，每项大小约为 $1/R$ ，所以绝对值壳层总量约为 R ，明显不可求和。

正负电荷抵消可以产生有限结果，但如何组织抵消会影响极限。球形、立方体、长针或薄片截断，对应不同有限晶体序列：

$$\alpha_S = - \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{n} \in LS, \mathbf{n} \neq 0} \frac{(-1)^{n_x+n_y+n_z}}{|\mathbf{n}|}.$$

这里的 S 就是宏观形状。因此，马德隆问题中所谓“求和顺序”并不是抽象符号的排列而已。它对应

求和顺序 $\longleftrightarrow$ 有限晶体生长方式 $\longleftrightarrow$ 表面和边界条件

这支持了你的核心直觉：有限逼近方式携带的信息，在无穷极限中未必消失。

七、形状依赖来自真实的长程物理

设晶胞总电荷为 Q ，偶极矩为 $\mathbf{p}$ 。远场多极展开从

$$\frac{Q}{R}, \quad \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3}, \quad \dots$$

开始。

若 $Q \neq 0$ ，周期库仑能强烈发散，因此标准 Ewald 求和要求晶胞电中性。

若 $Q = 0$ 但 $\mathbf{p} \neq 0$ ，远距离晶胞之间的偶极相互作用约按照 $1/R^3$ 衰减。三维壳层包含约 R^2 个晶胞，所以绝对值壳层贡献约为 $1/R$ ，累积产生对数临界性。不同角向抵消和宏观形状就可能产生不同结果。

这不是数学任意性，而是不同形状具有不同退极化场。

对于无宏观极化、局域电中性的普通晶体，有限晶块能量通常具有

$$E(N) = Ne_{\text{bulk}} + \gamma A + \lambda L + \cdots,$$

于是

$$\frac{E(N)}{N} = e_{\text{bulk}} + O(N^{-1/3}).$$

表面项在每粒子能量中消失，体相极限可以是唯一的。

但若存在宏观极化 $\mathbf{P}$ ，表面束缚电荷产生的退极化能可能按照体积增长：

$$E_{\text{dep}} \sim V \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}.$$

此时即使系统无限大，单位体积能量仍依赖形状和外部介质。这是真实的物理差异，不是计算缺陷。

八、Ewald 求和并不是随意指定答案

Ewald 方法使用恒等式

$$\frac{1}{r} = \frac{\text{erfc}(\eta r)}{r} + \frac{\text{erf}(\eta r)}{r},$$

把库仑作用拆成实空间快速收敛项和倒空间快速收敛项，再加上自能修正与表面项。

其结构可以概括为

$$E = E_{\text{short}} + E_{\text{reciprocal}} + E_{\text{self}} + E_{\text{surface}}.$$

辅助参数 η 决定怎样分割长程与短程部分，但精确总能不应依赖 η 。真正可能依赖宏观选择的是 E_{surface} ，它记录晶体形状、偶极矩、外部介电环境，以及采用真空边界还是导体边界。

例如，球形样品的表面项可写成

$$E_{\text{surface}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{(2\epsilon_{\text{out}} + 1)V} |\mathbf{M}|^2.$$

当外界是理想导体，即所谓 tin-foil 边界时，

$$\epsilon_{\text{out}} \rightarrow \infty, \quad E_{\text{surface}} = 0.$$

所以 Ewald 方法不是掩盖条件收敛，而是把它拆成

九、它与量子场论重整化相似在哪里

量子场论中首先必须区分正则化和重整化。

正则化是引入截断 Λ 、维数参数 ϵ 、晶格间距等辅助结构，把发散表达式暂时变成可计算对象。例如维数正则化可能产生

$$I(m^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \cdots \right].$$

重整化则把裸参数写成重整化参数与反项：

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2, \quad \lambda_0 = \mu^{2\epsilon}(\lambda + \delta\lambda),$$

再通过实验输入或匹配条件定义有限参数。

它与发散级数、Ewald 求和确有共同形式：

不良表达式 $\rightarrow$ 引入调节 $\rightarrow$ 分离发散与有限部分 $\rightarrow$ 用额外条件确定结果。

Ewald 参数 η 与正则化参数具有类似作用：它们可以改变中间表达式，但不应改变正确处理后的内在结果。

十、重整化为什么不等于随便减掉无穷大

量子场论中的反项受到严格限制：

1. 必须满足局域性；
2. 必须符合洛伦兹对称性；
3. 通常必须保持规范对称性；
4. 必须服从幂次计数；
5. 参数必须用实验或高能理论匹配；
6. 完整可观测量不能依赖任意重整化方案。

不同方案中的耦合可以通过有限重定义联系：

$$g' = g + c_1 g^3 + c_2 g^5 + \cdots.$$

于是 beta 函数和微扰系数会变化，但完整散射截面、衰变率等可观测量，在使用同一物理输入匹配后应当相同。

这更像坐标变换：坐标值改变，但几何对象不变。

实际计算只做到有限阶，因此会残留尺度和方案依赖。它通常代表被忽略的高阶项，而不是物理本身任意。

现代 Wilson 观点更把重整化理解为：改变观察尺度时，同时改变理论参数，使低能物理保持不变。所以重整化的核心不是

$$\infty - \infty = \text{任意有限数},$$

而是

不同尺度和不同参数化之间，怎样保持可观测物理不变

十一、真正最接近发散级数的是微扰展开的大阶发散

即使每一阶圈积分已经完成紫外重整化，整个微扰展开

$$F(g) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n$$

仍可能因为

$$a_n \sim n!$$

而发散。

这时才需要 Borel 求和、横向 Borel 积分、重现理论等工具。如果 Borel 平面上有奇点，不同积分路径可能产生模糊性；这些模糊性通常必须由非微扰效应抵消。

因此，应当区分两个问题：

1. 圈积分的紫外发散与反项重整化；
2. 已重整化微扰级数本身的大阶发散和广义求和。

第二种才和 $1 + 2 + 3 + \dots$ 的广义求和在技术上更加接近。

十二、与连续统假设的联系：哲学类比成立，数学机制不同

连续统假设 CH 断言

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Gödel 证明，如果 ZFC 相容，那么 ZFC 不能否定 CH；Cohen 又证明，如果 ZFC 相容，那么 ZFC 不能证明 CH。因此

$$\text{ZFC} \not\models \text{CH}, \quad \text{ZFC} \not\models \neg \text{CH}.$$

这里的分歧不是求和顺序不同，也不是正则化方法不同，而是存在不同集合论模型：

$$M \models \text{ZFC} + \text{CH},$$

同时也可以有

$$N \models \text{ZFC} + \neg\text{CH}.$$

所以 CH 与正则化的共同点只在更高的哲学层面：

结果必须相对于背景结构、公理或解释规则来说明。

但 CH 不是“有限算法处理无限时出现误差”。恰恰相反，Godel 和 Cohen 用完全严格、有限长度的证明揭示：一套有限表述的强大公理仍不足以决定某些无限结构问题。

十三、有限思维与无限思维的真正张力

人类的公式、公理和证明都是有限字符串，但它们可以谈论所有自然数、所有实数和整个集合论宇宙。这形成了现代数学的基本双层结构：

有限语法与证明 $\rightarrow$ 对无限结构的描述.

因此，有限思维研究无限本身并不是错误。真正的问题有两个：

1. 有限规则能否唯一确定目标无限结构？
2. 不同有限逼近方式之间，极限是否具有路径独立性？

发散级数主要触及第二个问题。连续统假设主要触及第一个问题。马德隆常数则说明，对于长程相互作用而言，宏观边界可能与局部体相无法完全分离。

哲学上可以区分潜无限和实无限。潜无限把无穷理解为永远可以继续的过程；实无限则把全部自然数、全部实数视为完成的整体。现代经典数学大体接受实无限，而直觉主义、有限主义和构造主义会对这种存在方式提出不同要求。

你的不安实质上触及的是：

一个只能进行有限操作的认识主体，凭什么断言关于完成无限整体的性质？

现代数学对此的回答不是消除所有哲学问题，而是通过公理、模型、极限和证明，把“在什么条件下可以断言什么”精确化。

十四、规则依赖是否意味着任意主义

并不意味着。

规则通常需要接受以下约束：

1. 与普通收敛结果相容；
2. 在明确的定义域内保持线性或平移性质；
3. 尊重问题的对称性；
4. 不依赖纯计算辅助参数；
5. 与其他独立方法一致；

6. 对应明确的物理边界或实验条件；
7. 产生稳定、可检验、可推广的结果。

zeta 正则化受到解析延拓唯一性和函数方程约束；Ewald 求和受到电中性、Poisson 方程和边界条件约束；量子场论受到局域性、规范对称性、么正性和实验匹配约束；集合论新公理则接受相容性强度、自然性、解释力和数学生产力的检验。

因此应当区分：

1. **任意选择**：为了得到预定答案而拼凑规则；
2. **约定选择**：不同坐标或表示，最终不变量相同；
3. **物理选择**：不同边界条件确实定义不同系统；
4. **理论不完备**：现有结构不足以唯一确定结果。

这四种情况不能混为一谈。

结论

你的思路是有道理的，而且抓住了一个很重要的统一视角：

无限对象不能脱离其定义、逼近或测量程序而孤立谈论。

你尤其正确地意识到，有限代数规律不能不加条件地移植到无穷过程。不同规则可能产生不同值，而形式上的严格性本身也不能回答“为什么应选择这套规则”。

但更精确的结论不是“有限思维无法可靠处理无限”，而是：

有限方法可以严格研究无限；但当绝对收敛、路径独立性或公理决定性缺失时，必须把额外结构公开写入问题定义。

马德隆常数告诉我们，求和顺序可能就是晶体形状和表面物理；重整化告诉我们，应区分不可观测的方案选择、由实验固定的参数和真正的物理不变量；连续统假设则告诉我们，有限公理未必唯一决定无限宇宙。

所以这几类问题的共同哲学不是“无穷导致任意”，而是：

严格性存在于明确规则之内；客观性体现为跨规则不变量，或规则所对应的实际条件。

这可能是“有限思维和无限思维碰撞”最有理论力量、同时也最不容易滑向相对主义的表达。

参考资料

发散级数与 zeta 正则化

1. G. H. Hardy, *Divergent Series*, 1949.
2. NIST DLMF, *Summability Methods*, Section 1.15.

3. NIST DLMF, [Riemann Zeta Function: Definition and Analytic Continuation](#).
4. NIST DLMF, [Riemann Zeta Function at Integer Arguments](#).
5. Candelpergher, Gadiyar and Padma, [Ramanujan Summation and the Exponential Generating Function](#).

马德隆常数与 Ewald 求和

1. de Leeuw, Perram and Smith, [Simulation of Electrostatic Systems in Periodic Boundary Conditions](#), 1980.
2. Ballenegger, [On the Origin of the Surface Term in the Ewald Formula](#), 2014.
3. Cisneros et al., [Classical Electrostatics for Biomolecular Simulations](#), 2014.
4. [Ensemble Averaged Madelung Energies of Finite Volumes and Surfaces](#).

重整化与有效场论

1. Wilson and Kogut, [The Renormalization Group and the Epsilon Expansion](#).
2. Appelquist and Carazzone, [Infrared Singularities and Massive Fields](#).
3. Beneke, [Renormalons](#).
4. [Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann Renormalization Scheme](#).

连续统假设与数学哲学

1. Stanford Encyclopedia of Philosophy, [The Continuum Hypothesis](#).
2. Paul Cohen, [The Independence of the Continuum Hypothesis I](#).
3. Stanford Encyclopedia of Philosophy, [Infinity](#).
4. Stanford Encyclopedia of Philosophy, [Hilbert's Program](#).
5. Stanford Encyclopedia of Philosophy, [Structuralism in the Philosophy of Mathematics](#).