

骰子背后还有没有上帝

副标题：从设备无关随机性到退相干、纯态热化、相干态与弱测量，一场关于“真随机”究竟有多真的研究

叙事说明：本文中的林澈、顾宁、沈遥及“黑箱鉴别实验”均为虚构，用来承载理论问题。文中涉及的 2026 年随机性放大实验、退相干理论、量子热化实验、弱测量实验及公式均来自真实论文或标准理论。虚构人物的对话不代表任何真实研究者的原话。

序章：两只发出同样噪声的黑箱

凌晨一点四十分，实验楼的走廊里只剩通风系统的低鸣。

林澈把两只黑箱放在光学平台上。它们外形完全相同，都只有一根电源线和一条光纤输出。每隔十微秒，探测器记录一次光子数。两条曲线都在屏幕上无规则地起伏，平均强度相同，涨落相同，二阶关联函数也相同。

箱子 A 里是一只真正达到热平衡的腔体。箱子 B 里没有传统意义上的热浴。它连接着一套被隔离的多体量子装置，整体从纯态出发，按照薛定谔方程作么正演化。林澈只能接触其中一个很小的子系统，装置的其余部分被锁在屏蔽层后。

顾宁看了十分钟数据，说：“如果你不给我拆箱权限，我分不出来。”

“给你一亿次测量呢？”

“如果两边对我开放的密度矩阵完全相同，一亿次和无限次都没有区别。”

“那哪一个更随机？”

顾宁没有回答。她在白板上写下三个问题：

1. 随机是对谁而言？
2. 这个观察者可以取得什么信息？
3. 我们允许他使用什么物理理论？

林澈皱了皱眉：“我问的是哪一个真的随机。”

“这三个问题，”顾宁说，“就是‘真的’里面藏着的量词。”

她指着黑箱：“如果所谓上帝只是拥有无限多次局部测量，却仍不能触碰屏蔽层，那么他也分不出 A 和 B。如果上帝能控制整个量子系统、读取所有环境自由度、反演全部么正演化，他就可能分出来。如果上帝还能站到量子理论之外，知道玻姆力学里的实际构型，或者知道每一个世界分支，那么你问的已经不是实验问题，而是本体论问题。”

这一夜的争论由此开始。

它最初听起来只是一个词义之争：什么叫“真随机”？但很快，三个人发现，他们真正争论的是另一件事：

一个有限世界中的观察者，能否用自己创造的理论，证明即使站到世界之外，也不存在更完整的确定性描述？

第一章：“真”不是形容词，而是一个对手模型

沈遥到实验室时，先把“真随机”拆成了三层。

第一层是**统计随机**。一个比特串中零和一大致各半，没有明显周期，能通过 NIST 或 Diehard 一类统计测试。它看起来像随机，却未必来自随机过程。密码学伪随机数发生器可以由一个短种子确定地生成很长的序列，并通过大量统计检验。一本早已印好的随机数表也可能拥有完美的频率性质，但拿到书的人能预测其中每一个数字。

因此，产物“看起来随机”不等于生成过程不可预测。

第二层是**操作性不可消除的随机**。这里不再只看比特串，而是规定一个对手能够掌握的侧信息 E ，再问他猜中输出 X 的最佳概率是多少。密码学常用条件最小熵表达这种不可预测性：

$$H_{\min}(X|E) = -\log_2 p_{\text{guess}}(X|E).$$

$p_{\text{guess}}(X|E)$ 是拥有侧信息 E 的最佳对手猜中 X 的概率。若一个均匀比特与对手完全独立，最佳猜测概率是 $1/2$ ，于是最小熵是 1 比特。若对手已经知道答案，猜中概率为 1，最小熵就是 0。

这条公式真正重要的不是对数，而是竖线右边的 E 。随机性从来不是一个孤立对象的裸属性，它总是相对于某类信息和某类预测者而言。对没有种子的人，伪随机序列可以极难预测；对持有种子的人，它完全确定。对只能测量一个热化子系统的人，结果可能无法进一步预测；对掌握整个纯态和全部隐藏变量的人，情况可能不同。

第三层是**本体论或法则层面的不确定性**：即便给出世界在某一时刻的完整真实状态和全部自然律，未来仍不唯一。这里的“真”不是说人类永远做不到，而是不存在任何更完整的事实使单次结果被预先决定。用户所说的“超越性的真”，大体对应这一层。

用户提出的区分因此抓住了要害：现实中无法消除的随机，与理论中无法消除的随机，不是同一个命题。

但还需要作一处术语修正。物理文献中“内禀随机性”(intrinsic randomness) 通常反而被用来指第二层中很强的模型相对不可预测性，甚至指第三层的非决定论。为了避免名字互换，本文把用户的第一种真称为**操作性不可消除性**，把第二种真称为**本体不可消除性**。

最关键的补充是：两者之间还夹着一层常被忽略的东西，叫作**理论相对的不可消除性**。

当一篇论文说“结果具有内禀随机性”，它通常不是在无条件地量化所有可能的神学视角，而是在说：

在量子理论正确、协议中的因果独立条件成立、对手受某种物理原则约束、可用侧信息被明确规定的前提下，没有允许的预测策略能把结果提前知道到某个精度以上。

这已经非常强，足以支撑密码学安全；但它仍不是“任何可能宇宙观中都没有确定性事实”的同义句。

沈遥在白板上写了一句后来贯穿整夜的话：

每一次“证明随机”，其实都是先画出一个对手，再证明这个对手猜不中。

如果对手是普通实验员，这是实验室随机；如果对手拥有量子存储器，这是量子密码学随机；如果对手只服从无信号原则，这是更设备无关的随机；如果对手是能够读取宇宙全部本体变量的拉普拉斯妖，那么问题已经越过现有实验协议的边界。

第二章：2026 年的实验，究竟把“真”推进到了哪里

林澈调出他们前几天一直讨论的论文：Anatoly Kulikov、Simon Storz 等人在 2026 年发表于 *Nature* 的《Experimental randomness amplification》。这是一次真实的设备无关随机性放大实验。

实验从有偏、质量不完美的 Santha–Vazirani 型随机源出发，用它为两个相隔约三十米、类空间隔开的超导量子节点选择测量设置。两个节点共享纠缠，执行约 1.342×10^9 轮试验。论文报告的平均 CHSH 值为

$$S_{\text{obs}} = 2.271,$$

超过局域隐藏变量模型的经典上界 2。为了处理输入本身并不完美的情形，安全证明实际使用了测量依赖局域性不等式（measurement-dependent locality inequality, MDL），而不是简单地把普通 CHSH 违反直接当作全部结论。

最终，实验从 5,368,709,120 个低质量输入比特中，提取出 20,431,465 个近乎均匀的输出比特；安全参数取为 $\varepsilon = 10^{-12}$ 。这里的“近乎均匀”不是“图上看不出花纹”，而是输出态与理想均匀、且对侧信息独立的状态之间的迹距离被控制在 10^{-12} 量级。

这项成就很强。它表明，实验者不必相信两台量子设备内部的详细工程模型，也不必假定输入种子已经完美；只要观测相关性、时空隔离和协议条件满足，就能对输出最小熵给出下界。设备甚至可以被当作黑箱。

但“设备无关”不是“假设无关”。

论文补充材料专门列出安全证明所需的前提，其中包括：

1. 量子力学是正确且完备的，并可用于描述对手；
2. 设备不会向对手泄露不应泄露的输出；
3. 模数转换、时序验证和经典后处理设备可信；
4. 两个弱随机源满足规定的 SV 条件，对手关于随机源的侧信息受到限制；
5. 当前轮输入不受先前设备输出以协议禁止的方式影响；

6. 两个节点在相关时间窗内不通信，实验时序与屏蔽条件成立。

这些不是实验缺陷，而是任何安全定理必须公开的逻辑地基。问题只在于，人们经常把“无需相信设备内部模型”误读成“无需相信任何物理前提”，再把“对量子对手不可预测”误读成“对任何可能的上帝视角都不确定”。

贝尔不等式违反真正排除的是一整类模型：在测量设置与隐藏变量保持适当独立、两个地点满足局域因果约束时，结果不能由局域隐藏变量预先决定。若坚持决定论，就必须放弃某些前提。例如：

1. 玻姆力学保留决定论，但接受非局域性；
2. 超决定论保留局域决定论的愿望，却否定测量设置与隐藏变量的独立性；
3. 多世界诠释保留普适么正演化，在全局层面没有随机跳跃，却把观察者的不确定性放进分支结构；
4. 客观坍缩理论则直接把随机过程写进动力学。

因此，贝尔实验不是对决定论的无条件逻辑否定。它是一台代价清单：如果还要决定论，就必须支付非局域性、测量不独立、分支本体论或其他结构上的价格。

从相关性到私有比特，中间隔着四道门

林澈问：“既然超过经典上界，为什么不能直接说每一位都是宇宙新生的？”

沈遥把实验认证拆成四步。

第一步不是看输出序列，而是建立一个因果实验。每轮中，两个节点分别接收设置 x, y ，产生结果 a, b 。由条件分布 $p(a, b|x, y)$ 定义相关函数

$$E_{xy} = \sum_{a,b} (-1)^{a+b} p(a, b|x, y),$$

标准 CHSH 组合为

$$S = E_{00} + E_{01} + E_{10} - E_{11}.$$

若结果由局域隐藏变量 λ 预先规定，且设置选择与 λ 适当独立，则

$$|S| \leq 2.$$

量子理论允许达到 $2\sqrt{2}$ ，而代数上最大值为 4。观察到 $S > 2$ ，说明数据不能由满足这些条件的局域预定值模型产生。这里真正起作用的不是“序列很乱”，而是不同设置下的联合相关性无法被同一套局域答案表同时解释。

第二步要处理设置源并不完美。若 x, y 可能与设备内部变量相关，普通 CHSH 推理会松动：设备也许事先猜到哪些题更常出现，再有选择地准备答案。Santha–Vazirani 源的思想，是即使给定过去信息和允许的侧信息，每个新输入仍保留一个不为零的不可预测区间。2026 年实验使用适合这种测量依赖情

形的 MDL 不等式，把“题目有偏”直接纳入局域模型的上界，而不是先假装输入均匀，再把偏差塞进误差条。

第三步是把不等式违反换算成猜测概率。设对手持有侧信息 E ，对输出串 Z 的最优猜测概率为 $p_{\text{guess}}(Z|E)$ ，则条件最小熵定义为

$$H_{\min}(Z|E) = -\log_2 p_{\text{guess}}(Z|E).$$

统计违反越可靠，允许的对手模型中 p_{guess} 就越不能接近一，因而可认证的最小熵越多。有限数据下还必须支付置信区间、设备记忆、轮间相关和抽样涨落的代价。不能把平均 CHSH 值机械地代入一个独立同分布公式；严格分析要允许设备根据历史调整行为，再用熵累积或论文采用的相应安全工具控制整段试验。

第四步才是随机性提取。原始输出不是天然均匀，它只是含有可证明的条件熵。提取器用一个满足协议条件的种子，把这部分熵压缩成更短的输出串 R ，并保证联合态接近

$$\tau_R \otimes \rho_E,$$

其中 τ_R 是理想均匀态。安全参数约束的正是实际联合态与这个理想对象的距离。因而“生成两千万个随机比特”的精确意思不是每一位都被逐位证明没有原因，而是整段输出在规定对手模型下与均匀、私有资源可组合地接近。

这四道门也揭示了“无限观察者”一词的含混。一个计算能力无限、但仍受协议因果结构和量子理论约束的对手，可以被安全证明覆盖；一个能读取设备泄漏、操纵随机源、改变过去输入，或者根本不服从所假设物理理论对手，则不在同一个定理里。对手越像上帝，越需要说明他究竟拥有哪些权限。

随机性认证最重要的思想因此不是给世界盖一枚“本体随机”印章，而是把一句模糊的“没人能猜到”改写成三个可以审计的问题：

1. 谁在猜？
2. 他掌握什么侧信息？
3. 他必须服从哪些物理与因果限制？

问题一旦这样写，操作性随机并不低级。它是一个有明确量词、误差和对手边界的定理。真正不严谨的反而是跳过这些边界，直接从一张随机性检验图宣布宇宙不存在更深描述。

顾宁把结论压缩成一句话：

2026 年实验认证了极强的、可量化的、足以用于密码学的随机性；它没有证明所有可能的形而上学都必须是随机的。

这不是降低实验地位。恰恰相反，只有把结论写在它真正成立的范围内，我们才知道它究竟击败了哪些对手。

第三章：哥本哈根把随机写在哪里

“那我原来的分类至少有一半是对的，”林激说，“哥本哈根就是把随机性写进描述本身。”

顾宁说：“标准教科书版本大体如此，但‘哥本哈根’不是一部只有一个条文的宪法。”

历史上的玻尔、海森堡以及后来被统称为哥本哈根阵营的观点并不完全相同。玻尔尤其谨慎，他强调实验条件、经典概念与互补性，并不总把波函数当作一种在空间中真实坍缩的物质。今天实验室里通常使用的“标准量子力学”更像一套双重规则：

一方面，孤立系统的量子态服从确定的薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle.$$

只要初态和哈密顿量给定，态矢量的未来由么正算符

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle, \quad U(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

唯一确定。

另一方面，当测量可观测量

$$\hat{A} = \sum_a a P_a$$

时，结果 a 以玻恩概率

$$p(a) = \langle \psi | P_a | \psi \rangle$$

出现，并在理想投影测量中把条件态更新为

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{P_a |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_a | \psi \rangle}}.$$

第一条是确定的连续演化，第二条含有单次结果的随机选择。测量问题正是由这两套规则的并置产生：测量仪器明明也由量子物质组成，为什么它在某一刻不再只服从第一条，而触发第二条？

若把坍缩当作真实物理过程，随机性确实进入动力学本身。若把坍缩理解为信息更新，随机性的本体地位又要重新讨论。若采用多世界，第二条不再是基本动力学，而是分支内观察者的条件化规则。若采用玻姆理论，波函数和实际构型共同决定结果。

所以“哥本哈根认为描述本身自带随机”是一个有用的入口，但不能直接推出“所有量子理论的完整描述都必须随机”。更准确的说法是：

标准操作性量子理论只给单次结果的概率，不提供一个在其形式体系内部可访问的变量来进一步预测该结果；不同诠释对这种不可预测是否意味着世界本身非决定，给出不同答案。

第四章：环境选中了指针，却没有替世界按下唯一按钮

林澈最坚持的是退相干。

“波函数和构型可以确定地演化，环境也确定地趋向热浴。测量装置被开放系统动力学诱导到特定指针态。为什么还需要一个随机坍缩？”

顾宁在白板上写下最简测量模型。设被测系统处于

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle,$$

仪器起初在准备态 $|A_r\rangle$ ，环境在 $|E_r\rangle$ 。理想测量耦合与环境相互作用共同产生

$$\begin{aligned} & (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)|A_r\rangle|E_r\rangle \\ \longrightarrow & c_0|0\rangle|A_0\rangle|E_0\rangle + c_1|1\rangle|A_1\rangle|E_1\rangle. \end{aligned}$$

这个总态仍是纯态，整个过程仍是么正而确定的。环境把“仪器显示 0”与环境态 $|E_0\rangle$ 相关，把“仪器显示 1”与 $|E_1\rangle$ 相关。宏观环境包含海量自由度，二者的重叠

$$\gamma = \langle E_1|E_0\rangle$$

会极快变得接近零。

如果实验者不能访问环境，就对环境取偏迹：

$$\rho_{SA} = \text{Tr}_E |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

展开后，非对角项带着 γ 或 γ^* 。当 $\gamma \approx 0$ 时，

$$\rho_{SA} \approx |c_0|^2|0, A_0\rangle\langle 0, A_0| + |c_1|^2|1, A_1\rangle\langle 1, A_1|.$$

对所有只能测量系统与仪器的实验而言，这个约化态几乎像一个经典概率混合：仪器不是处在可见的“0 与 1 的宏观干涉”中，而表现为稳定、互不干涉的记录。

退相干由此解决了两个极其重要的问题。

第一，它解释了为什么宏观叠加的干涉项在实践中消失得如此彻底。不是意识神秘地凝视了仪器，而是仪器持续把相位信息散播到空气分子、热辐射、支撑结构和无数环境自由度中。

第二，它解释了为什么某些基底比其他基底稳定。环境并不是平均地破坏一切，而是通过相互作用哈密顿量“监测”某些物理量。能在这种监测下保持相关记录的状态叫**指针态**（pointer states）；这种环境诱导的优选叫**环境诱导超选择**（einselection）。对位置耦合占主导的宏观物体，近似局域的波包常成为稳健状态；对阻尼谐振子，相干态可能成为近似指针态；在别的耦合下，能量本征态或其他状态也可能被优选。

但上述公式也清楚显示，退相干没有完成第三件事：它没有从

$$c_0|0, A_0, E_0\rangle + c_1|1, A_1, E_1\rangle$$

中删掉任何一项。

它把干涉变得不可见，把“哪一种记录可以稳定存在”解释出来，却没有仅凭幺正演化说明“为什么这一轮世界中只实现了 0，而不是 1”。这就是所谓**确定结果问题**。

约化密度矩阵看起来像普通概率混合，但它是由纠缠得到的“不恰当混合”(improper mixture)。普通混合可以理解为系统实际上已经处在某个确定状态，只是我们不知道是哪一个；纠缠约化态则不能在不增加诠释规则的情况下直接读成“全局事实上只剩某一项”。

这一区别不影响局部统计，却影响本体论。

因此，“开放热浴把仪器诱导到特定本征态”需要改成两种更准确的说法之一：

1. **无条件动力学**：环境把约化密度矩阵压到某个稳定基底附近，抑制基底间相干，但通常留下多个可能记录的统计混合；
2. **有条件动力学**：若环境的一部分被连续监测，并给定具体测量记录，量子轨迹可以随机地条件化到某个分支；这里的“选中”依赖那条记录，随机性并未被消去。

开放系统当然也能被设计成确定地冷却到唯一稳态，例如振幅阻尼把量子比特送到基态，或耗散工程制备唯一暗态。但这与一次具有多个可能结果的测量不是同一件事。前者的动力学只有一个吸引子；后者必须解释为什么每一轮出现不同而确定的记录，并满足玻恩概率。

顾宁在“退相干”下面画了两条线：

退相干解释经典记录为什么稳定；诠释或新动力学解释哪一条记录算作实际发生。

林澈沉默了一会儿。他原来把这两件事看成同一件事。

看不见相位，不等于相位从世界上消失

这个区别还可以用“能否复相干”检验。若所谓退相干只是系统与一个可控辅助自由度纠缠，那么对联合系统实施适当逆变换，原则上可以把分支重新合并，恢复干涉。量子擦除、回波实验和小型量子处理器里的退相干校正，都是这种逻辑的有限版本。它们不要求每个环境自由度都可控，只要泄漏信息仍集中在一个可逆的、实验者能够操纵的范围内。

宏观情形之所以看起来绝对，是因为记录被冗余复制到极多环境片段。一个尘埃的位置会同时改变散射光、空气分子、支撑物振动和热辐射。想恢复干涉，不只要“把尘埃推回原处”，还要把这些携带哪条路径信息的自由度按相位精度一起复原。漏掉任何足以区分分支的信息，约化态中的相干就不会完全回来。

因此，实际不可逆性可以极强，却仍与基本非幺正性不同。前者说，相位信息扩散到实验者无法控制的关联里；后者说，原理论中的相位信息被新的动力学真正删除。二者在日常尺度上可能给出几乎相同的现象，但它们不是同一命题。

开放系统常用 Lindblad 主方程表达马尔可夫近似下的演化：

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right).$$

L_k 描述环境诱导的跃迁、耗散或退相干。这个方程对系统密度矩阵通常不可逆，但它可以来自更大系统上的确定么正演化，再对环境取偏迹。仅看到系统服从非么正主方程，不能判断宇宙整体是否非么正；这与只看热气体的摩擦方程，不能判断微观定律是否不可逆，是同一种层次问题。

若进一步连续监测环境，主方程可以展开成不同的随机量子轨迹：光子计数对应跳跃式轨迹，同相探测可对应扩散式轨迹。对所有记录取平均，又回到同一个无条件主方程。这里有一个常被忽略的事实：同一密度矩阵演化可有多种轨迹展开，轨迹形状取决于环境被怎样测量。把某一种数值模拟轨迹直接当作系统唯一的本体历史，会多走一步诠释。

客观坍缩理论与此不同。它不是仅把未观测环境积分掉，而是主张即使把所有普通环境都隔离，波函数也会按新随机定律自发局域。于是它原则上可能带来标准量子理论没有的加热、辐射、干涉可见度损失或质量尺度依赖。退相干越像一层可以追踪的环境账本，客观坍缩越像直接修改总账规则。

这给“神学视角”一个更物理的版本。所谓跳出实践，不是抽象地拥有无限智慧，而是获得对纯化系统、环境记录和整体演化的联合控制。若这种控制能恢复相干，原先的混合是开放系统意义上的有效混合；若在排除环境后仍出现理论预言的基本相干损失，才可能指向真正非么正的新物理。现实实验尚未把这种边界推到所有尺度。

第五章：黑箱 B 为什么能像真正的热源

沈遥把两只黑箱的数学模型写了出来。

先看单模热光场。温度为 T 的量子谐振子热态可写成

$$\rho_{\text{th}} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} |n\rangle\langle n|,$$

其中 $\beta = 1/(k_B T)$ ， ω 是模式频率， $|n\rangle$ 是光子数本征态。这个态是混态，光子数呈玻色-爱因斯坦分布。

现在引入一个实验者无法接触的辅助系统 E ，构造整体纯态

$$|\text{TFD}\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega/2} |n\rangle_S |n\rangle_E.$$

这是热场双态（thermofield double）形式。整体密度矩阵

$$\rho_{SE} = |\text{TFD}\rangle\langle\text{TFD}|$$

满足

$$\text{Tr}(\rho_{SE}^2) = 1,$$

所以整体是纯态，冯诺依曼熵为零。但只看子系统 S ，

$$\rho_S = \text{Tr}_E \rho_{SE} = \rho_{\text{th}}.$$

于是，对任何只作用在 S 上的测量，包括最一般的 POVM $\{M_a\}$ ，结果概率都是

$$p(a) = \text{Tr}(\rho_S M_a) = \text{Tr}(\rho_{\text{th}} M_a).$$

右边与一个“真正由热系综描述的光源”完全相同。

这不是说两者看上去大概差不多，而是说：只要实验者可访问的密度矩阵严格相同，量子理论允许的所有局部测量统计就严格相同。在两种制备跨样品也不留下额外可访问相关性的前提下，给他一份样品、一亿份样品，甚至无限多份独立同分布样品，也无法仅凭局部数据判断混态究竟是“我们不知道系统实际在哪个纯态”，还是“系统与外部纠缠后得到的约化态”。

这回答了用户提出的关键问题：

一个纯量子态热化到无限逼近经典热系统，怎样区分它和真正热随机光源？

答案取决于“你能测什么”。

若只能接触局部子系统，而两者的约化态在迹距离上接近，

$$D(\rho_S, \rho_{\text{th}}) = \frac{1}{2} \|\rho_S - \rho_{\text{th}}\|_1 \leq \varepsilon,$$

那么任何一次最优测量区分它们的优势都受 ε 控制。 ε 越小，它们在该观察代数上越不可区分。若严格相等，就没有任何局部实验可以区分。

若能接触被隐藏的环境，情况改变。对整体作联合测量可以检测纠缠和纯度；控制整个系统还可能看到回波、复相干或长时间复现。对真正的混合制备与其纯化进行全局比较，相关结构不同。

所以“无限测量的神力”仍然说得不够清楚。无限重复局部测量，并不会自动变成全局访问。一个被限制在子系统代数中的神，仍然看不见纯化；一个能操纵整个宇宙希尔伯特空间的神，则可能看见被局部热态隐藏的相位与纠缠。

黑箱问题真正教会人的不是“纯态等于热态”，而是：

一个状态是纯还是混，不只是结果序列的表面属性；它取决于系统边界画在哪里，以及观察者能够访问哪些关联。

第六章：纯态谈温度，究竟是不是胡说

“传统热力学里，对纯态谈温度确实很怪。”林澈说，“温度来自平衡系综，不是单个微观态的属性。”

这句话有正确的历史直觉，却不能直接带进现代量子多体理论。

在经典平衡统计力学中，温度通常通过宏观平衡关系、熵对能量的导数或系综参数定义：

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N, \dots}.$$

从这个角度看，给一个任意指定的微观相空间点贴上温度，确实没有普遍意义。单个粒子此刻有一个速度，不等于它“拥有温度”；温度描述的是宏观状态、能量分布和可交换平衡关系。

但量子理论中的“纯态”并不等于“没有任何局部统计结构”。一个整体纯态可以因纠缠而使小子系统处于混态。Popescu、Short 和 Winter 在典型性研究中证明：在给定全局约束的高维希尔伯特空间里，几乎所有允许的整体纯态，对足够小的子系统都给出接近相应正则态的约化密度矩阵。这叫**正则典型性** (canonical typicality)。

其思想可以写成

$$\rho_S(\psi) = \text{Tr}_E |\psi\rangle\langle\psi| \approx \Omega_S = \text{Tr}_E \left(\frac{I_R}{d_R} \right),$$

其中 R 是满足总能量等约束的子空间， d_R 是其维数。若环境远大于子系统、耦合适当、能谱条件合适， Ω_S 进一步接近 Gibbs 态

$$\rho_S \approx \frac{e^{-\beta H_S}}{Z}, \quad Z = \text{Tr}(e^{-\beta H_S}).$$

这项结果首先是运动学的：它说明热的局部约化态在高维纯态中非常典型，不单独证明某个具体初态会在给定动力学下迅速走到那里。

动力学问题由本征态热化假说 (eigenstate thermalization hypothesis, ETH) 等框架处理。ETH 对少体或局部可观测量 $\hat{O}$ 的矩阵元提出结构：

$$\langle E_m | \hat{O} | E_n \rangle = \overline{O}(E) \delta_{mn} + e^{-S(E)/2} f_O(E, \omega) R_{mn}.$$

这里 $E = (E_m + E_n)/2$ ， $\omega = E_m - E_n$ ； $\overline{O}(E)$ 是随能量平滑变化的热力学值； $S(E)$ 是热力学熵； R_{mn} 是均值近零、量级为一的复杂涨落项。对角元在相近能量本征态之间几乎相同，非对角元则被 $e^{-S/2}$ 压低。这样，一个孤立纯态即使始终么正演化，局部可观测量也能在退相位后稳定到微正则或正则系综预测附近。

2016 年，Kaufman 等人用六个铷原子的隔离多体系统直接研究这一过程。他们观察到：全局态保持可测的纯度，局部子系统却因纠缠增长而失去纯度，局部观测趋向热系综预测，纠缠熵承担了热熵的角色。这是“纯态局部热化”非常直观的实验实例。

因此，最准确的判断不是“纯态有温度”或“纯态谈温度完全无意义”二选一，而是：

1. 任意纯态不自动拥有唯一温度；
2. 全局纯态的冯诺依曼熵可以为零；
3. 若能量密度明确，且局部约化态或少体观测满足热关系，可以给该纯态定义操作性的有效温度；
4. 对满足 ETH 的能量本征态，单个纯本征态本身就能对局部观测呈现热力学；

5. 对可积系统、多体局域化系统、量子多体疤痕态或特殊初态，普通 Gibbs 热化可能失败，需要广义 Gibbs 系综或完全不同的描述。

“温度属于系综”在旧统计力学中是一条重要提醒；现代多体理论则告诉我们，系综有时不是世界真实地抽签选择了许多全局微观态，而是局部观察对一个高纠缠纯态的有效描述。

这正是用户直觉中最有力量的部分：现实中的热性，不必以全局基本随机为前提。

但还要再修正一步：**热化不等于经典化**。

低温热态可以有纠缠、超流、拓扑序和其他纯粹量子性质；一个系统达到 Gibbs 态，也不意味着所有相关可观测量都近似对易，更不意味着测量结果问题已经解决。经典性通常还需要退相干、粗粒化、大占据数、适当指针变量和有限分辨率共同作用。

热化回答“为什么少量宏观变量足以预测平衡行为”；退相干回答“为什么某些量子相位在局部实践中不可见”；测量诠释回答“为什么我们经验到一个确定结果”。三者互相配合，却不能彼此替代。

温度不是一个标签，而是一组一致性关系

沈遥拿来一个小型量子探针，问：“如果一个纯态真的有温度，温度计应该读到什么？”

这是比争论名词更好的问题。让一个能级间隔为 Δ 的弱耦合探针与系统接触，若探针的上跃迁率和下跃迁率满足

$$\frac{\Gamma_{\uparrow}}{\Gamma_{\downarrow}} = e^{-\beta\Delta},$$

就可以从详细平衡关系读出温度。也可以检验低频涨落与线性响应是否满足涨落耗散关系，或者检查系统的相关函数是否满足 KMS 条件。还可以把两个子系统接触，看能量平均流向是否与它们各自定义的温度一致。

当这些不同“温标”给出同一个 β ，温度才成为稳健的状态参数。对一个远离平衡的任意纯态，不同探针、不同频率和不同局部区域可能读出不同有效温度，此时把它简称为“温度为 T ”会掩盖信息。对一个满足 ETH 的高能本征态，许多局部温标却可能一致，即使全局态严格纯、全局冯诺依曼熵为零。

这也解释了为什么“纯态有温度”不是语法矛盾。纯度回答的是完整密度矩阵是否满足 $\rho^2 = \rho$ ；温度回答的是一组受限可观测量和能量交换关系是否呈现平衡结构。两个谓词作用在不同问题上。一个整体纯态可以让每个小区域的温度计稳定读出同一数值，正如一个确定的经典微观轨迹也可以在粗粒化层面具有压强和粘滞系数。

但温度也不总是唯一或普通。具有能谱上界的系统可能出现负温度参数；周期驱动系统可能先进入持续很久的预热化平台，再在更长时间尺度趋向无限温；强无序相互作用系统可能保持局域记忆；可积系统拥有大量守恒量，长期状态往往由广义 Gibbs 系综

$$\rho_{\text{GGE}} \propto \exp \left(- \sum_j \lambda_j Q_j \right)$$

描述，而不是只用一个能量和一个温度。量子多体疤痕则让某些特殊初态在通常会热化的模型中反复回返，形成非典型动力学。

这些反例不是热化理论的失败，而是提醒我们：热化是一组关于哈密顿量、初态、可观测量和时间尺度的命题。说“大部分多体系统能热化”时，必须交代“大部分”指随机选取的态、非可积模型、局部观测还是实验上常见的准备方式。不能从一个具体系统出现稳定温度，推出所有纯态都天然带有温度；也不能从存在非热化特例，否认典型多体纯态的局部热性。

再看“真正热随机光源”。实验室黑体辐射也不是一本抽象系综在发光，而是大量物质自由度与电磁场耦合后的开放稳态。它的热性通过光谱、强度关联、详细平衡和响应关系建立。若另一台装置用整体纯态制备出完全相同的局部场态，那么在给定观察代数上，二者拥有同一温度与同一随机统计。坚持其中一个“真的热”、另一个“假的热”，除非同时指出可访问的全局关联差异，否则只是把制备历史偷偷放进状态名称。

反过来，局部看起来热也不保证全局没有可用资源。热场双态的两个半边单独看都热，联合起来却有精确纠缠；某些量子热机能利用相干、挤压或非平衡关联，使单一温度描述失效。一个只读温度计的观察者与一个能做联合层析的观察者，面对的是不同的有效状态空间。

所以用户提出的“庸俗世界与神学视角”可以在热化问题上被严格翻译：

1. 庸俗观察者只能测局部少体量，看到 Gibbs 关系，因而合理地把系统当作热态；
2. 更强观察者能访问非局部关联，可能识别全局纯度、纠缠和制备历史；
3. 即便如此，若两种完整制备在所有允许测量上给出同一密度算符，它们就不是两个可由量子实验区分的状态。

神的能力不能只写成“测量次数无限”，还要写成“可观测代数扩大到哪里”。无限次重复一个受限实验，只会把同一组局部概率估计得更精确，不会凭空获得对环境和纯化的访问权。

第七章：现实不是先有纯净定律，再被噪声弄脏

凌晨三点，楼外开始下雨。雨点撞在金属窗沿上，没有两个声音完全相同。

林澈说：“我们平常遇到的根本不是教科书里那种隔离系统。现实的物体天生嵌在一堆热源里。一只猫放在那里，无论底层是量子的还是经典的，表现出来都是热辐射、呼吸、化学反应和宏观属性。”

这段判断的主线是正确的。

实验室可以努力制备低熵、低温、隔离、可控的量子态，日常世界却通常处于完全相反的条件：宏观物体不断与光子、空气、地面振动、内部声子、电子和化学环境交换能量与信息。它们是开放系统，也是内部自由度极多的多体系统。局部信息迅速扩散，相位关系迅速泄漏，少数宏观变量趋向稳定，微观细节则对实际观察者不可追踪。

经典世界不是在量子世界之上另装的一套新物质，而是量子系统在特定尺度、耦合、粗粒化和观察能力下形成的有效结构。

对一只猫的质心位置、体温、轮廓和运动，我们不会也不需要追踪 10^{27} 个粒子的完整波函数。环境对位置等变量的持续监测，使宏观不同位置分支的相干项极快衰减；内部热化使大量微观自由度可以由温度、压强、化学势等少量参数描述；有限分辨率又把微小量子涨落平均掉。最终，我们得到近似满足经典随机过程或经典动力学的宏观变量。

这里的“随机”常常具有三重来源：

1. 对初始条件和内部自由度的无知；
2. 混沌放大带来的预测困难；
3. 量子测量统计与纠缠约化带来的模型内不可预测性。

真实系统通常把三者混在一起。热噪声、电路噪声、散粒噪声和探测器噪声中，经典与量子成分可能同时存在。有限实验必须建立噪声模型，才能说哪一部分可由环境温度解释，哪一部分来自量子真空涨落或单量子事件，哪一部分可能被对手掌握。

所以“现实内置一堆热源”不是反量子论证，而是对实验语境的准确提醒：绝大多数宏观随机性没有必要诉诸一次次神秘的基本坍缩才能解释其统计外观。确定的微观动力学、未知初态、内部纠缠、热化和环境退相干，已经能够产生极强、极稳定、几乎无法逆转的有效随机。

然而，“几乎无法逆转”仍不等于“本体上没有逆过程”。么正量子理论保留全部全局信息，只是信息被编码进极复杂的多体关联中。庞加莱复现、Loschmidt 回波和精细量子控制提醒我们：不可逆性常是热力学极限、初态典型性和控制能力共同产生的有效事实。小系统中，人们确实能够实现部分回波和复相干；宏观环境中，所需控制精度随自由度数目爆炸增长。

这恰好对应用户所说的第一种“真”：现实实践中有些随机性不是简单改进仪器就能消去的，而是由系统规模、信息扩散、量子限制和可控资源共同筑成。它对有限文明可能像基本定律一样坚固。

但从这一事实仍不能推出第二种“真”。因为一个不可逆到宇宙寿命都不够用的过程，仍可能在全局方程里保持可逆；一个任何人类都无法恢复的相位，仍可能在整体纯态中存在。实践极限可以无限逼近原则极限，却不自动与原则极限相同。

第八章：相干态为什么像经典场，但不是所有场态

雨声停下后，林澈把话题转到量子场论。

“场论的算符被设计成物理量，现实能测到的是构造相干态的参数。场的状态某种意义上就是相干态。用 $|\alpha_k, \phi_{\text{class}}\rangle$ 标记不是更直接吗？”

沈遥说：“这句话里有一个很好的方向，也有一个会让整个希尔伯特空间塌掉的过度推广。”

先看好的方向。

对自由玻色场，每个动量模式都像一个量子谐振子。相干态 $|\{\alpha_k\}\rangle$ 定义为各湮灭算符的本征态：

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|\{\alpha\}\rangle = \alpha_{\mathbf{k}}|\{\alpha\}\rangle.$$

它可以写成

$$|\{\alpha\}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3k |\alpha_{\mathbf{k}}|^2\right) \exp\left(\int d^3k \alpha_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\right) |0\rangle.$$

在这种态中，场算符的期望值

$$\phi_{\text{cl}}(x) = \langle\{\alpha\}|\hat{\phi}(x)|\{\alpha\}\rangle$$

满足相应的经典自由场方程。 $\alpha_{\mathbf{k}}$ 的实部和虚部编码各模式的经典振幅与相位；平均粒子数为

$$\langle\hat{N}\rangle = \int d^3k |\alpha_{\mathbf{k}}|^2.$$

相干态的相对涨落在 $\langle N \rangle$ 很大时变小。对单模情形，粒子数呈泊松分布，方差等于均值：

$$(\Delta N)^2 = \langle N \rangle, \quad \frac{\Delta N}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}.$$

当 $\langle N \rangle$ 很大，相对涨落很小，场期望值沿近似经典轨道演化。这就是激光、经典电磁波和许多宏观序参量能够由相干态或近似相干态描述的原因。

相干态还具有**过完备性**。对单模，

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = I.$$

在场论中，对所有模式作相应泛函积分，可以在传播子或配分函数的时间切片之间插入这种恒等分解，从而得到相干态路径积分。凝聚态和多体理论大量使用这套语言，因为玻色产生湮灭算符、序参量、鞍点近似和经典场极限在这里连接得很自然。

但“相干态构成过完备基”不等于“所有物理态本身都是相干态”。

平面波也能展开任意平方可积函数，却不能因此说任意函数就是一条平面波。相干态的过完备性说明任意态可以用相干态分解、叠加或积分表示；它不说明任意态都满足

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|\psi\rangle = \alpha_{\mathbf{k}}|\psi\rangle.$$

量子场论中存在大量非相干态：

1. 固定粒子数的 Fock 态；
2. 压缩态；
3. 热态；
4. 纠缠态；
5. 相互作用真空；
6. 拓扑态与强关联多体态；
7. 不能由简单位移算符作用在自由真空上得到的态。

甚至“经典性”也不只由 Glauber 相干态垄断。压缩态可在某个正交分量上比相干态噪声更小；固定粒子数的玻色凝聚态在适当局部观测和热力学极限下也可能呈现稳定相位行为；退相干选择的指针态取决于系统—环境耦合，并非所有场都统一选择同一类相干态。

还有一个常见误解：相干态不必包含无穷多个粒子。有限 $\int d^3k |\alpha_{\mathbf{k}}|^2$ 对应有限平均粒子数。经典极限常涉及大占据数、无限体积极限或 $\hbar \rightarrow 0$ 的缩放；某些长程场和红外穿衣态确实可能需要无穷多软量子，但那是特殊的红外结构，不是所有宏观经典场的定义。

因此，用 $|\alpha_{\mathbf{k}}, \phi_{\text{class}}\rangle$ 标记场态有两处问题。

第一，对自由场相干态而言， $\alpha_{\mathbf{k}}$ 已经决定 $\phi_{\text{cl}}(x)$ ，二者通常不是独立标签。第二，对一般量子场态，单组 $\alpha_{\mathbf{k}}$ 根本不足以编码全部量子关联。一个一般态需要 Fock 展开系数、波泛函、密度算符，或其他完整表示。

在薛定谔表象中，可以用场构型本征态 $|\phi\rangle$ 表示量子态：

$$\Psi[\phi] = \langle \phi | \Psi \rangle.$$

$\Psi[\phi]$ 是定义在场构型空间上的波泛函。这里的 $\phi(\mathbf{x})$ 是表示变量， $|\phi\rangle$ 是广义场本征态；它们也不自动是相干态。相干态表示则写成 $\Psi(\alpha^*) = \langle \alpha | \Psi \rangle$ 。两者都是表示同一抽象态的方法，不能把坐标系与被描述对象混为一谈。

林澈原来的直觉可以保留为一句更准确的话：

相干态把量子场的某些态与经典场参数直接连接起来，并提供构造场论路径积分和有效理论的强大坐标；但一般量子场态不是一组经典场参数，能用相干态展开也不等于它本身是相干态。

第九章：一个“坐标确定的单粒子”到底是什么状态

顾宁在白板上写下林澈建议向 AI 追问的问题：

一个确定坐标的单粒子，对应什么量子场状态？

这个问题在非相对论量子场论里有一个直观答案。若 $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})$ 是粒子产生场算符，则形式上的位置本征态可写成

$$|\mathbf{x}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle.$$

它是不同动量单粒子态的叠加，粒子数严格为一。它不是相干态，因为相干态包含 $0, 1, 2, \dots$ 各粒子数扇区的叠加。更实际的定域波包是

$$|f\rangle = \int d^3x f(\mathbf{x}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle = \int d^3k \tilde{f}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle,$$

其中 f 可归一化并具有有限宽度。

若强行取精确的 δ 函数位置态，它不是普通可归一化希尔伯特空间向量，而是广义本征态；无限精确定位还要求无限宽的动量分布。现实探测器总有有限空间分辨率，所以物理制备通常是波包或某个区域对应的 POVM，而不是数学上的绝对坐标点。

进入相对论量子场论后，问题更微妙。

Newton 和 Wigner 可以为有质量单粒子构造位置算符及其本征态，但这种定域方式不洛伦兹协变，并伴随与相对论因果直觉紧张的瞬时尾部或超光速扩散问题。代数量子场论更倾向于把局域性赋给区域中的可观测代数，而不是赋给一颗拥有严格位置算符的基本粒子。

在相互作用场论中，局域场算符 $\hat{\phi}(x)$ 作用于真空也通常不会只创造一个干净的单粒子态。它可能同时耦合到单粒子极点和多粒子连续谱。LSZ 理论之所以要从远过去和远未来的渐近态提取粒子概念，正因为相互作用区域里的“粒子”不像非相对论小球那样简单。

这并不说明粒子概念虚假。探测器确实产生离散点击，散射实验也精确验证了粒子态的能量动量关系。它说明的是：场论里的“一个粒子在一个点”不是最基础、最无条件状态标签，而是依赖粒子扇区、渐近结构、探测模型和定域方案的理想化。

因此，若 AI 被引导只回答“它对应某个 $|\alpha_k, \phi_{\text{class}}\rangle$ ”，反而会错过核心区别：

1. 单粒子定域波包是固定粒子数 Fock 态的动量叠加；
2. 相干态是湮灭算符本征态，粒子数不确定；
3. 场波泛函描述一般量子态在场构型上的振幅；
4. 经典场期望值只编码一阶信息，不能替代完整量子态；
5. 相对论场论中的严格粒子定域本身存在结构性困难。

第十章：Fujikawa、路径积分与“测度”究竟说明了什么

林澈提到 Fujikawa，是因为他关心场分布空间中的积分测度：既然相干态恒等分解能导出泛函积分，是否说明场论真正的状态空间就是相干态参数空间？

这要把两条技术路线分开。

第一条是**相干态路径积分**。在时间演化算符之间反复插入

$$I = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

把量子振幅写成对随时间变化的复变量 $\alpha(t)$ 的积分。多体玻色系统中常得到

$$Z = \int \mathcal{D}\alpha^* \mathcal{D}\alpha e^{-S[\alpha^*, \alpha]},$$

费米系统则使用 Grassmann 相干态。这里的积分变量提供一种计算表示。尤其对凝聚态，有效作用量的鞍点常对应平均场或序参量，涨落则围绕它展开。

第二条是 **Fujikawa 方法**。Fujikawa 1979 年研究的是费米场路径积分测度在手征变换下的雅可比。他把场展开在狄拉克算符的完备本征函数上，定义形式测度，再发现正则化后的测度并不保持经典手征对称性，雅可比产生手征反常。其核心是：

经典作用量的对称性不保证量子泛函测度在正则化后仍具有同一对称性。

这项工作确实说明“测度”不是无关紧要的符号，选择基底、正则化无限模态和计算雅可比会产生真实物理后果。但它不能推出“一般场态都是相干态”。Fujikawa 的完备模态展开与相干态恒等分解都能帮助定义或操纵泛函积分，却服务于不同问题。

更一般地说，路径积分写成

$$\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar}$$

并不意味着量子系统在每一时刻“实际处于某个经典场构型 ϕ ”。路径积分是计算振幅的表示，所有路径以复相位叠加；它既不是普通概率分布，也不是一张隐藏经典历史的清单。欧氏化后权重在某些玻色理论里类似统计权重，但费米符号、实时间振荡、规范冗余和相互作用正则化仍使“测度”远比有限维概率积分复杂。

用户的直觉在方法论上仍有价值：相干态不是教材边角，而是连接算符、经典相空间、序参量、有效作用量与泛函积分的重要工具；凝聚态物理尤其擅长在这条桥上工作。需要拒绝的只是由“这是一套极有用的坐标”跳到“所有物理态本体上就是这种坐标点”。

第十一章：本征值、指针读数与我们真正看见的东西

林澈接着说：“在我看来，本征值代表动力学中的物理量，但本征值不是测量结果。真正变成宏观经典量的是相干态参数、指针参数。”

顾宁说，这句话碰到了测量理论中一个真实问题，但结论下得太满。

真实实验从不直接看见希尔伯特空间中的符号 a 。人看见的是探测器电压、屏幕亮点、计数器数字、指针位置或一段经过校准的软件输出。测量装置把微观系统与宏观指针建立相关：

$$|a\rangle|A_r\rangle \longrightarrow |a\rangle|A_a\rangle.$$

最终“读数”确实是宏观指针态 $|A_a\rangle$ 的粗粒化类别。实验标定建立了指针类别与理论结果标签 a 的对应。有限分辨率、噪声和非理想耦合意味着现实测量通常由 POVM $\{E_y\}$ 描述：

$$p(y) = \text{Tr}(\rho E_y).$$

这里 y 是仪器输出标签，不一定等于某个厄米算符的精确本征值。温度计读数、到达时间、模糊位置和联合弱测量常属于这种广义测量。

但在理想投影测量的理论模型中，说“测量可观测量 $\hat{A}$ 的结果是它的本征值”仍然是准确的。谱分解

$$\hat{A} = \sum_a a P_a$$

把可能结果值 a 与投影算符 P_a 对应起来；仪器被校准为报告这些结果。宏观指针不是取代本征值，而是物理实现并记录结果标签。

因此，应当区分三件事：

1. **理论可观测量的谱**：规定理想测量可能报告哪些数值；
2. **测量仪器的宏观指针变量**：把微观差异放大为稳定记录；
3. **广义测量的结果标签**：可能只是一个事件类别，不必对应唯一算符本征值。

用户的说法适合用来反对一种幼稚图像：仿佛实验者直接伸手从系统里取出一个抽象本征值。真正发生的是系统、仪器和环境的动力学关联。但若进一步说“本征值不是测量结果”，就会否定投影测量模型本身已经精确定义并被大量实验验证的对应关系。

相干态参数也不是所有测量结果的共同本体。异频或外差探测可以估计光场振幅和相位，量子态层析可以重建 Wigner 函数，弱测量可以获得条件平均；而光子计数直接与数算符统计相关，自旋 Stern–Gerlach 实验产生离散分支。不同测量访问量子态的不同函数，不存在一组宏观参数天然取代全部可观测量。

第十二章：弱测量看见了轨迹，还是画出了条件流线

凌晨四点半，沈遥打开 Kocsis 等人 2011 年的双缝实验图。图中一束束曲线从两条缝后展开、弯曲，最终落到干涉条纹的亮区。它们看起来像单光子的路径。

弱测量的基本思想是让系统与指针发生很弱的耦合。若预选态为 $|\psi_i\rangle$ ，随后只保留最终被后选到 $|\psi_f\rangle$ 的实验轮次，那么可观测测量 $\hat{A}$ 的弱值是

$$A_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}.$$

当耦合足够弱时，单次指针位移远小于指针本身的噪声，几乎不能告诉我们这一颗粒子的 $\hat{A}$ 是多少；但重复许多次，并对同一后选结果组成的子系综取平均，可以从指针平均位移中估计 $\text{Re } A_w$ ，从动量变化等量中取得虚部信息。

弱值可以超出 $\hat{A}$ 的本征值范围。这不是仪器读错，而是预选、微弱耦合和后选共同定义的条件量。Pusey 等工作进一步表明，在适当操作条件下，反常弱值可作为量子情境性的证据。

Kocsis 实验对经过双缝的单光子作弱动量测量，再按后续强位置测量进行后选。在一系列传播平面上，他们重建局部平均动量场，并把流线连接起来，得到“单光子平均轨迹”。论文自己使用的谨慎表述是：弱测量使人能够为量子粒子系综操作性地定义一组轨迹，并描述后选子系综的传播。

这里有四个不能跳过的限定。

第一，轨迹不是从同一颗光子在连续时刻的精确位置记录拼出来的。每个位置平面和后选箱需要大量重复实验。图上的一条曲线是从系综条件平均场积分得到的流线。

第二，弱测量不是“完全不扰动”。耦合越弱，单轮扰动越小，但单轮信息也越少，需要更多样本。后选还会丢弃大量数据。所谓弱，是一个信号、扰动和样本数之间的极限过程。

第三，在近轴光学条件下，重建的流与量子概率流、局部 Poynting 向量以及特定定义下的玻姆速度场有紧密关系。Wiseman 证明，在假定位置是隐藏变量且采用标准概率流时，弱测速度与玻姆指导速度一致。

第四，这种一致不等于实验在标准量子力学与玻姆力学之间作出了裁决。两种理论对该实验给出相同统计预测。实验重建了一个由波函数与测量协议确定的操作性速度场；是否把这些流线解释为每颗粒子未被测量时真实走过的本体轨迹，需要额外采用玻姆诠释。

所以，弱测量可以回答：

在给定预选、后选和弱耦合协议下，某个量的条件平均怎样随位置变化？概率流或玻姆型速度场的流线是什么？

它不能无条件回答：

这一颗粒子在完全不受测量影响时，客观上逐点走过了哪条唯一道路？

后一个问题只有在先给出“粒子始终有位置和轨迹”的本体论后才有确定含义。标准量子理论不必承认这种轨迹；玻姆理论承认，并把弱测量结果与其速度场连接；其他诠释则给出不同语言。

林澈原来把弱测量理解为“专门测宏观参数而不改变物理量”。更准确的说法是：

弱测量用极小的单轮耦合换取系综层面的条件信息，能访问普通强测量不直接显示的弱值、概率流和相位结构；它不消除测量反作用，也不把条件统计量自动变成单粒子的预存属性。

第十三章：确定的全局，随机的分支，哪一个才算现实

三个人重新回到最初的分歧。

林澈想保留一个“完美描述”：在那张描述中，波函数、构型、环境和仪器都按确定方程演化；随机只属于身处局部、无法读取全部自由度的观察者。顾宁则提醒，退相干只给出分支结构，不自动给出唯一实际分支。沈遥关心的是实验能认证到什么程度，而不是先选择一套宇宙本体论。

几种主要路线可以被摆在同一张桌上。

标准坍缩或操作主义路线

量子态给出测量概率，单次结果没有进一步可预测的理论变量。若把坍缩当作基本物理事件，随机是动力学内禀的。优点是直接对应实验操作；困难是测量边界和坍缩何时发生需要解释。

Everett 或多世界路线

普适波函数始终么正演化，所有退相干分支都保留。全局演化确定，没有某一项被随机删除。观察者在测量前不知道自己将处于哪个后继分支，玻恩权重如何成为理性概率需要决策论、对称性或典型性等额外论证。这里随机更接近分支内的自定位不确定性，而非全局动力学随机。

玻姆力学路线

波函数与粒子实际构型共同构成完整状态，二者按确定且非局域的方程演化。若初始构型服从 $|\psi|^2$ 的量子平衡分布，观察者恢复玻恩统计。随机来自对实际构型的无知和典型性，而不是基本跳跃。贝尔定理迫使这种决定论明确非局域。

客观坍缩路线

GRW、CSL 等理论修改薛定谔动力学，加入真实随机的自发局域化。宏观叠加因新的随机物理过程而坍缩，不需把“测量”作为基本概念。这些模型与标准量子理论在某些尺度上预测微小差异，因此可被实验约束；随机性在这里是法则层面的。

超决定论与逆因果路线

它们通过放松测量独立性或改变因果结构来逃离贝尔结论。逻辑上不能被一句“宇宙阴谋”彻底排除，但要成为成熟物理理论，必须给出自然的动力学、初态解释和可检验的新预测，而不是在每次不利数据后临时宣称设置与隐藏变量早已共谋。

QBism 与关系性路线

量子态和概率首先表达行动者对未来经验的期待，测量结果是行动者获得的新事件。它们拒绝把波函数直接当成上帝视角的世界清单，因此“结果在测量前是否已决定”可能被视为错误设问或关系性问题。

这些路线并非都只是口味。客观坍缩与标准么正理论可能产生可检验差异，量子引力或宇宙学也可能提供新约束。但目前大量日常量子实验，包括弱测量和退相干实验，并没有在经验等价的诠释之间选出唯一赢家。

因此，用户说“选择在于你是否相信人类能创造超越现实的完美描述”，说中了诠释争论的精神核心，却还可以再精确一点：

争论不只是人是否相信完美描述，而是何种变量算作完整状态、何种动力学算作基本、概率是世界倾向还是观察者信息，以及一个只预测统计分布的理论是否已经算完整。

一个确定的全局理论可以产生局部不可消除的随机；一个随机的基本理论也可以在宏观上产生近乎确定的经典规律。确定与随机不是简单贴在“微观”或“宏观”上的标签，它们取决于描述层次、状态空间、可访问变量和条件化方式。

哪些分歧只是语言，哪些分歧能够走进实验室

顾宁不愿让诠释比较停在“各有道理”。她在白板上画出一条界线：一边是对同一实验概率分布的不同本体解释，另一边是会修改概率分布的新理论。

玻姆力学处在量子平衡时，与非相对论标准量子力学复现实验统计。普通双缝、弱测量和退相干数据因此不能仅凭符合玻恩规则就判它出局。实验重建的流线与玻姆速度场相符，可以说明一种数学联系，却不等于直接观察了隐藏构型。若有人提出可制备的“非量子平衡”分布并给出偏离玻恩规则的预测，那才会从诠释进入新物理；在没有这种可操作方案时，经验等价仍然存在。

Everett 路线也不因为观测到退相干就被单独证实。退相干是分支结构形成的必要动力学部分，但接受所有分支都同样存在，还需要本体论承诺。相反，普通坍缩语言可以使用完全相同的退相干计算。只要两种路线对所有可做实验给出同一概率，它们的差异就不能靠再多同类计数直接解决，而要靠理论简洁性、概率基础、相对论兼容性和未来理论统一等标准比较。

客观坍缩模型更直接地冒险。它们给出新的质量尺度、坍缩率或噪声参数，可能导致大质量干涉额外衰减、冷原子或机械振子的异常加热，以及特定自发辐射。实验可以逐步排除参数区间。若未来在充分隔离环境后观察到稳定、可重复且符合某一坍缩模型标度的新偏差，那将是“描述本身含随机动力学”的实证支持；若干涉尺度不断扩大而无偏差，客观坍缩的自然参数空间就会继续收缩。

超决定论的可检验性取决于它是否只是一句逻辑退路，还是一套具体模型。若它总能在事后为任何设置序列安排隐藏相关，就几乎不承担预测风险；若它给出设置源、粒子源和宇宙初态之间可计算的相关结构，则可以寻找不同随机源、不同时空安排或宇宙光子设置下的偏差。科学问题不是这个词听起来是否怪异，而是模型是否压缩事实并预言尚未观察的关系。

逆因果模型同样不能只凭“未来影响过去”四个字接受或拒绝。它必须说明因果回路为何不产生可控悖论、为何宏观信号仍遵守限制，以及它是否提供不同于标准形式主义的统计预言。若只重写同一振幅的解释，它仍属于经验等价的主体语言；若产生新关联，就进入实验。

设备无关随机性实验在这张图上的位置非常清楚。它强力排除局域、测量独立的预定答案模型，并在规定物理理论下认证私有熵；它不在玻姆与 Everett 之间投票，也不证明所有超决定论模型错误。它缩小了可接受理论的走廊，却没有把走廊压成一个点。

这并不意味着形而上问题永远没有进展。相对论曾把绝对同时性从自然结构中移走，贝尔定理把“局域、实在、自由设置可同时无代价保留”的愿望击碎，宏观干涉实验持续压缩简单客观坍缩模型。哲学选项会被数学一致性和实验数据不断提高成本。只是成本增加与逻辑上彻底不可能仍是两种结论。

对于随机性，最诚实的实验路线不是寻找一项能一次证明“世界绝对无因”的神谕，而是不断扩大被排除的决定论模型类别：

1. 关闭探测与局域性漏洞，排除更多局域预定模型；
2. 改善随机设置与因果安排，压缩测量依赖解释的空间；
3. 扩大物质波干涉尺度，约束客观坍缩；
4. 控制更大环境，测试退相干的可逆边界；
5. 在多体系统中测量更高阶关联，区分局部热性与全局纯化；

6. 把安全证明写成对侧信息可组合的熵界，而不是只做统计检验。

每推进一步，“现实中无法摆脱的随机”都会获得更坚固的物理内容。是否最终把它提升为“任何本体论中都无法摆脱”，则取决于我们能否证明足够一般的定理，并愿意为定理的公理负责。

第十四章：两种“真”之间并不是一道门，而是一架梯子

天快亮时，顾宁把整场讨论整理成六级。

第一级：没有明显模式

序列通过频率、相关性和压缩性测试。它可能仍由短程序决定，不能保证不可预测。

第二级：对现实观察者不可预测

在给定仪器、时间、能量和计算资源下，没有可行方法显著提高预测率。热噪声、混沌和复杂多体动力学大量属于这一层。

第三级：对掌握规定侧信息的任意对手不可预测

通过最小熵、迹距离和可组合安全定义，协议证明即使对手拥有量子侧信息，输出仍接近均匀且私有。设备无关随机数发生器追求这一层。

第四级：在某组物理原则下不可被预定

贝尔违反结合测量独立性、局域因果或无信号等条件，排除相应的预定值模型。这里的“内禀”已很强，但仍明确依赖原则集合。

第五级：在当前量子形式体系中没有更细预测

标准量子理论只给出玻恩概率。Colbeck–Renner 类型结果在自由选择等假设下进一步限制能够提高预测力的扩展。2026 年实验的安全证明则直接假设量子力学正确且完整。

第六级：任何可能的完整本体论都不决定结果

这是用户所说的“超越性真随机”。它要求排除非局域决定论、多世界全局决定论、超决定论及一切尚未构造的确定性理论。有限实验无法在不预设某些关于因果、自由设置和理论形式的条件下完成这种全称证明。

从第一级到第五级，物理学和数学已经取得巨大进展。尤其第三级和第四级并非“仅仅因为我们无知”，而是可通过实验统计和信息论定理对最强允许对手给出定量界限。把它们贬为“只是庸俗世界里的随机”会低估现代随机性认证的力量。

但从第五级跳到第六级也确实跨越了哲学台阶。实验可以告诉我们：若世界满足这些原则，则不存在那类更好预测。它不能在完全不规定原则的情况下证明“一切可设想的上帝都猜不中”。

这就是两种“真”的最终关系：

操作性真随机可以被科学认证，而且认证可以强到对拥有量子记忆的恶意对手仍成立；本体真随机则是关于世界完整结构的主张，实验能够强烈约束它，却不能脱离理论前提独自宣布它。

第十五章：哪些判断成立，哪些必须收紧

沈遥把林澈最初的观点逐条写在屏幕上。

1. 必须区分现实不可消除与理论不可消除的随机

成立，而且是整场讨论最重要的贡献。

还应加入“理论相对的不可消除性”作为中间层。随机性认证不是从有限数据直接跃迁到无条件本体论，而是相对于侧信息、对手能力和物理假设建立定理。

2. 退相干加开放系统说明随机可以来自确定的全局演化

大体成立。

全局纯态可以么正演化，局部系统因纠缠和环境信息泄漏表现为混态、热态和稳定经典记录。这为“实践中不可消除、全局描述仍确定”的路线提供了坚实机制。

3. 环境确定地把仪器诱导到某个特定本征态

需要关键修正。

环境确定指针基底并抑制不同记录之间的干涉，但无条件约化态通常包含多个结果分量。它不靠纯么正动力学选择唯一结果。要得到单一实际结果，还需坍缩、实际构型、分支相对化、条件量子轨迹或其他解释。

4. 热化纯态和真正热源可能无法区分

在限定观察代数后成立，甚至可以严格成立。

若局部约化密度矩阵相同，任何局部测量都不能区分；若只近似相同，区分能力由迹距离控制。获得全局环境、纯度或关联访问后，区别可能重新出现。

5. 对纯态谈温度是 nonsense

作为对任意微观纯态随意贴温度标签的批评是对的；作为一般结论则错误。

现代典型性、ETH 和实验表明，全局纯态可以对局部观测呈现 Gibbs 热性，并可由能量密度定义有效温度。不是每个纯态都有温度，也不是温度要求世界真的处在主观无知系综中。

6. 宏观经典量常是相干态或序参量的参数

在重要的一类系统中成立。

相干态振幅、凝聚序参量和场期望值确实能成为宏观经典变量。它们是连接量子场与经典场的关键。

7. 场论所有态都是相干态

不成立。

相干态过完备，能展开一般态；这不等于一般态自身是相干态。Fock 态、压缩态、热态、纠缠态和相互作用真空都是反例。费米相干态中的 Grassmann 标签更不能被直接当作可测经典场。

8. 本征值不是测量结果，宏观参数才是

需要收紧。

现实读数是宏观指针事件，广义测量输出不总等于算符本征值；但理想投影测量的结果按定义就是相应本征值，指针负责记录它。宏观参数与本征值是测量链的不同层，不是互相排斥的候选。

9. 弱测量能回答“未被测量的粒子走了哪条路”

只能在操作性或特定诠释意义上成立。

弱测量重建后选子系综的条件平均、概率流或玻姆型速度场，不直接记录单个未扰动粒子的唯一历史。把流线当作真实粒子轨迹，需要额外采用玻姆本体论。

10. 相干态积分为场分布空间测度提供实际道路

作为计算方法成立。

相干态恒等分解是构造多体和场论路径积分的重要工具；但泛函测度还涉及离散化、正则化、规范固定、反常和相互作用。Fujikawa 方法说明测度的正则化会有物理后果，却不证明相干态是所有场态的本体。

尾声：哪只箱子更随机

早上六点，第一班清洁人员推着车经过实验室门口。

林澈再次看向两只黑箱。屏幕上的两条噪声曲线仍在起伏。A 是热腔，B 是整体纯态的一个小窗口。对当前探测器，它们拥有同样的密度矩阵。

“所以答案是没有答案？”他问。

顾宁摇头。

“答案是，你原来的问题少了主语。”

她指着探测器：

“对这台只能接触局部输出的仪器，它们同样随机。对拥有无限多份局部样品但不能接触纯化的观察者，它们仍同样随机。对能控制整体环境并反演演化的观察者，它们可能不同。对一个相信客观坍缩的理论家，某些单次结果是法则随机。对一个玻姆主义者，结果由不可见构型决定。对多世界理论，全局没有随机删除，但分支中的观察者仍无法预知自己将经验哪种结果。”

“那 2026 年实验生成的随机数呢？”

“它们不是因为我们喜欢哥本哈根才安全。它们的安全来自明确的协议定理：在论文列出的量子、因果、隔离和侧信息假设下，即使设备内部不可信，对手也无法把输出猜到超过证明允许的程度。这比‘看起来很乱’强得多。”

“但不是上帝证明。”

“物理学从来不对一个没有定义能力边界的上帝做安全证明。”

林澈关掉黑箱 A，又关掉黑箱 B。两条曲线同时停在最后一个数字上。

他原来以为随机与确定之间有一条边界：边界这边是噪声，另一边是完美方程。现在他明白，真正的地图有许多层。局部与全局、纯态与约化态、动力学与条件化、可预测与可访问、实验定理与本体解释，每一层都可能把“随机”这个词重新写一遍。

人类的描述当然可能比人的实践走得更远。我们可以写下无法实际反演的么正演化，可以定义包含全部环境的纯态，可以想象掌握所有构型的观察者。理论让有限的人越过当前操作能力，建立一种有限度的“神学视角”。

但理论是否已经抵达世界最后一层，不由理论的完美形式自行保证。一个确定的方程可能只描述概率振幅；一个随机公理可能只是操作规则；一个设备无关证书也仍有公开假设。科学最强的地方不是宣布自己站在宇宙之外，而是把“在什么条件下，我们已经排除了什么”写得足够清楚。

最后，沈遥在值班记录上写下整篇研究最短的总结：

量子物理已经能够认证一种对现实中极强对手也不可消除的随机，却还不能仅凭有限实验证明：在任何可能的上帝视角中，世界都没有确定的完整故事。退相干与热化说明确定的全局可以产生随机的局部，但它们没有单独解决为什么我们只经验到一个结果。

学术说明：事实、公式与虚构边界

1. 虚构内容

1. 两只黑箱、实验楼夜班以及林澈、顾宁、沈遥均为叙事装置。
2. 黑箱 B 用热场双态和纯态热化的真实理论机制构造，但不是对某个具体实验装置的报道。
3. 人物对话用于呈现理论分歧，不是对真实学者言论的转述。

2. 论文与实验明确支持的内容

1. 2026 年 Kulikov 等实验实现设备无关随机性放大，报告约 1.342×10^9 轮试验、平均 $S_{\text{obs}} = 2.271$ ，从 5,368,709,120 个弱随机输入比特提取 20,431,465 个近乎均匀比特，安全参数为 10^{-12} 。
2. 该实验安全证明明确假设量子力学正确且完整，并要求设备不泄漏、经典处理可信、随机源与轮次间相关满足规定条件。
3. Zurek 与 Schlosshauer 等退相干研究支持环境诱导指针态、抑制干涉与经典记录稳定性的机制。
4. 退相干本身不从全局纯叠加中选择唯一结果，这是测量问题文献中的标准限定。
5. Popescu、Short、Winter 的正则典型性结果表明，几乎所有满足全局约束的纯态都可使小子系统接近正则态。
6. Kaufman 等 2016 年实验观察到隔离多体系统全局保持纯态而局部热化，纠缠熵承担局部热熵角色。
7. Kocsis 等 2011 年实验重建的是单光子后选子系综的平均轨迹或流线，而非对同一颗未扰动光子完整历史的连续拍摄。

3. 标准理论背景

1. 热场双态用于精确展示“整体纯、局部热”的可能性。
2. ETH 矩阵元公式是量子热化文献的标准表达，不专属于单一实验。
3. 相干态定义、过完备恒等分解、粒子数泊松涨落和经典场期望值是量子光学与场论标准结果。
4. 定域单粒子 Fock 波包与相干态的区别属于标准二次量子化。
5. Fujikawa 方法处理路径积分测度在手征变换下的非平凡雅可比及量子反常。

4. 本文分析而非实验定论

1. 把随机性分成六级，是本文为澄清讨论建立的分析框架。
2. “有限实验不能无前提证明任何可能本体论都非决定”是方法论判断，不是某篇实验论文的直接结论。

3. 对哥本哈根、多世界、玻姆、客观坍缩、QBism 的比较是诠释层面的概括；现有共同量子统计不能在所有经验等价诠释之间裁决。

参考文献

1. Kulikov, A. et al. "Experimental randomness amplification." *Nature* 653, 1033–1038 (2026). DOI: [10.1038/s41586-026-10521-8](https://doi.org/10.1038/s41586-026-10521-8). 开放预印本: [arXiv:2412.17931](https://arxiv.org/abs/2412.17931).
2. Pironio, S. et al. "Random numbers certified by Bell's theorem." *Nature* 464, 1021–1024 (2010). [arXiv:0911.3427](https://arxiv.org/abs/0911.3427).
3. Acín, A. & Masanes, L. "Certified randomness in quantum physics." *Nature* 540, 213–219 (2016). [arXiv:1708.00265](https://arxiv.org/abs/1708.00265).
4. Colbeck, R. & Renner, R. "No extension of quantum theory can have improved predictive power." *Nature Communications* 2, 411 (2011). [arXiv:1005.5173](https://arxiv.org/abs/1005.5173).
5. Hensen, B. et al. "Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres." *Nature* 526, 682–686 (2015). [arXiv:1508.05949](https://arxiv.org/abs/1508.05949).
6. Zurek, W. H. "Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical." *Reviews of Modern Physics* 75, 715–775 (2003). [arXiv:quant-ph/0105127](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0105127).
7. Schlosshauer, M. "Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics." *Reviews of Modern Physics* 76, 1267–1305 (2005). [arXiv:quant-ph/0312059](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0312059).
8. Popescu, S., Short, A. J. & Winter, A. "Entanglement and the foundations of statistical mechanics." *Nature Physics* 2, 754–758 (2006). [arXiv:quant-ph/0511225](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0511225).
9. D'Alessio, L., Kafri, Y., Polkovnikov, A. & Rigol, M. "From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics." *Advances in Physics* 65, 239–362 (2016). [arXiv:1509.06411](https://arxiv.org/abs/1509.06411).
10. Kaufman, A. M. et al. "Quantum thermalization through entanglement in an isolated many-body system." *Science* 353, 794–800 (2016). [arXiv:1603.04409](https://arxiv.org/abs/1603.04409).
11. Aharonov, Y., Albert, D. Z. & Vaidman, L. "How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100." *Physical Review Letters* 60, 1351–1354 (1988). DOI.
12. Wiseman, H. M. "Grounding Bohmian Mechanics in Weak Values and Bayesianism." *New Journal of Physics* 9, 165 (2007). [arXiv:0706.2522](https://arxiv.org/abs/0706.2522).
13. Kocsis, S. et al. "Observing the Average Trajectories of Single Photons in a Two-Slit Interferometer." *Science* 332, 1170–1173 (2011). DOI.
14. Pusey, M. F. "Anomalous Weak Values Are Proofs of Contextuality." *Physical Review Letters* 113, 200401 (2014). [arXiv:1409.1535](https://arxiv.org/abs/1409.1535).
15. Zhang, W.-M. "Coherent States in Field Theory." [arXiv:hep-th/9908117](https://arxiv.org/abs/hep-th/9908117).
16. Fujikawa, K. "Path-Integral Measure for Gauge-Invariant Fermion Theories." *Physical Review Letters* 42, 1195–1198 (1979). DOI.

17. Falcone, R. & Conti, C. "Localization in Quantum Field Theory." *Reviews in Physics* 12, 100095 (2024). [arXiv:2312.15348](#).
18. Dürr, D., Goldstein, S. & Zanghì, N. "Quantum Equilibrium and the Origin of Absolute Uncertainty." *Journal of Statistical Physics* 67, 843–907 (1992). [arXiv:quant-ph/0308039](#).
19. Landsman, K. "Randomness? What randomness?" *Foundations of Physics* 50, 61–104 (2020). [arXiv:1908.07068](#).
20. Bell, J. S. "On the Einstein Podolsky Rosen paradox." *Physics Physique Fizika* 1, 195–200 (1964). [DOI](#).
21. Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A. & Holt, R. A. "Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories." *Physical Review Letters* 23, 880–884 (1969). [DOI](#).
22. Lindblad, G. "On the generators of quantum dynamical semigroups." *Communications in Mathematical Physics* 48, 119–130 (1976). [DOI](#).
23. Ghirardi, G. C., Rimini, A. & Weber, T. "Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems." *Physical Review D* 34, 470–491 (1986). [DOI](#).
24. Bassi, A., Lochan, K., Satin, S., Singh, T. P. & Ulbricht, H. "Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests." *Reviews of Modern Physics* 85, 471–527 (2013). [arXiv:1204.4325](#).