

远方既弱又强

副标题：从彭罗斯铺砌、无穷着色到哥德尔不完备，我们究竟碰到了哪一道“无穷壁垒”

问题的提出

我的直觉是：

普通瓷砖与远方的联系很强，因为它们排列整齐，局部图案可以一直复制到远方。彭罗斯铺砌与远方的联系似乎很弱，因为我们从眼前这一小块看不出整体最终是什么样子；但这种联系似乎又很强，因为彭罗斯铺砌能够按照层级不断嵌套、膨胀，一直铺向无穷。 > 这种“既弱又强”是否碰到了类似哥德尔不完全定理的无穷壁垒？是不是某些整体虽然存在，却无法构造？不可公度的比值、不可数无穷与这种现象之间又有什么关系？

这个直觉抓住了一个真正重要的问题：**局部规则究竟能在多大程度上决定远方？**

但要回答它，必须先把“联系很强”拆成不同含义。普通周期铺砌和彭罗斯铺砌都具有强秩序，只是它们把秩序储存在不同地方。

最简洁的判断是：

普通周期铺砌具有很强的“点对点重复关系”；彭罗斯铺砌失去了这种简单关系，却具有很强的“层级、统计和谐结构关系”。它是**地址很弱、语法很强；位置难以预测、结构高度受限**。

这正是“既弱又强”的准确含义。

一、普通铺砌的远方联系：强在一个短周期就能统治整个平面

先看最普通的正方形铺砌。

只要确定一块正方形的位置、方向和边长，整张铺砌就可以通过两个方向的平移生成。若边长为 a ，那么对任意整数 m, n ，平移向量

$$(ma, na)$$

都会把铺砌带回它自身。

这意味着一个位置与很远位置之间存在精确的点对点关系。只要知道远方相对当前位置移动了多少个周期，就能准确知道那里有什么。

所以普通周期铺砌的“远方联系很强”，可以具体解释为：

- 存在全局坐标**：每块砖都可以按整数格编号。

2. **存在有限基本单元**：知道一个小区域，便可通过重复得到全部图案。
3. **存在精确平移对称**：远方不是近处的大致相似，而是完全相同。
4. **描述成本不会随面积增长**：不必逐块描述无限平面，只需描述一块基本单元和重复规则。

换句话说，普通铺砌并不需要每块砖真的向远方“发送消息”。它们之所以显得高度协调，是因为全部位置都服从同一个简单周期。所谓“远方联络强”，在数学上其实是**远方之间共享一个低复杂度的全局相位**。

如果把它翻译成计算机语言，周期铺砌像一个极短的程序：

```
画一个基本单元；  
沿两个方向重复；  
永远继续。
```

不过这里需要一个限定：几何结构整齐，不代表所有分布式任务都容易。例如，在一个完全匿名、完全对称的网络中，如果没有编号、随机性或外部方向，节点反而可能无法打破对称。普通网格容易描述，但网格上的某个具体协调任务仍可能需要远距离通信。

因此，“整齐”降低的是整体结构的描述复杂度，不自动消除每一种算法问题。

二、彭罗斯铺砌的远方联系为什么显得很弱

彭罗斯铺砌由有限种砖和局部匹配规则构成，却没有任何非零平移能让整个铺砌与自身完全重合。它是非周期的。

因此，我们无法像处理正方形网格那样说：

向右移动十个单位，就会回到同一个相位。

彭罗斯铺砌没有一个有限基本单元，可以通过平移机械复制整个平面。即使眼前出现一个很大的有限图案，我们通常也不能仅凭这个图案确定：

1. 自己位于整个铺砌的哪个绝对位置；
2. 更远处某个指定坐标上究竟是哪一种砖；
3. 当前有限图案应当嵌入哪一个完整铺砌；
4. 整个铺砌在无穷远处采取的是哪一种全局“相位”。

事实上，彭罗斯铺砌不只一个，而是有不可数多个彼此不同的完整铺砌。这里的“不同”可以取为无法通过整体平移或旋转使二者重合。

奇怪的是，这些不同铺砌在任何有限窗口中又非常相像。一个有限图案若出现在某个彭罗斯铺砌里，通常会在其他同类铺砌中也出现；只看一个有界区域，无法确认自己面对的是哪个完整铺砌。

所以它的弱联系可以表达为：

有限局部信息不足以确定远方的绝对位置和唯一延伸。

这和《一座新桥梁连接了无穷的奇异数学与计算机科学》中讨论的局部视野非常接近。

在 LOCAL 分布式模型里，一个节点运行 T 轮，只能看见半径 T 的邻域。若两个巨大网络在这个邻域中完全相同，那么节点无法判断自己究竟位于哪一个网络，也无法知道远方如何闭合。

彭罗斯铺砌中的观察者也面临类似处境：无论观察多大的有限区域，眼前图案都可能嵌入多个不同的全局铺砌。有限视野无法提供唯一的“宇宙地址”。

这就是你感受到的整体未知性。

但“有限视野不能确定唯一整体”不等于“整体没有规则”，更不等于“整体不可构造”。接下来正是反转发生的地方。

三、彭罗斯铺砌的远方联系为什么又非常强

彭罗斯铺砌虽然没有周期，却绝不是随机撒下的砖。它具有至少三种强烈的长程秩序。

1. 局部匹配规则能够约束整个无限平面

砖边上的箭头、凹凸或颜色只规定相邻砖怎样接合。这些都是有限范围的局部规则。

然而，只要整个平面都满足这些规则，最终得到的铺砌就不能是周期铺砌。有限局部规则竟然能够强迫所有全局解都具有非周期性。

这是一种很反直觉的强联系：每块砖只检查自己的邻居，但这些检查共同排除了整个无限平面上的任何平移周期。

它说明局部规则并不需要明确告诉每块砖远方是什么，也能对远方施加限制。远方不是由近处逐点复制出来，而是被同一套局部语法约束。

2. 膨胀与缩小形成无限层级

彭罗斯铺砌具有膨胀与缩小结构。以黄金比例

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

为尺度，可以把若干小砖组合成更大的“超级砖”，也可以把一块砖按规则分解成更小的砖。

反复进行后，会出现尺度

$$1, \quad \varphi, \quad \varphi^2, \quad \varphi^3, \dots$$

上的层级。

因此，一块砖不只是与邻居发生关系。它还属于某个一级超级砖；这个超级砖又属于二级超级砖；如此不断嵌套。

这正是你所说的“可以嵌套铺出去”。它意味着远方并非毫无联系，而是通过越来越大的层级结构发生联系。

周期铺砌的秩序是横向重复：

单元—单元—单元—单元.....

彭罗斯铺砌的秩序更像纵向嵌套：

砖 $\subset$ 超级砖 $\subset$ 更大超级砖 $\subset$ 更大层级.....

普通铺砌告诉远方：“你和我是一个基本单元的复制品。”

彭罗斯铺砌告诉远方：“你未必和我相同，但我们属于同一套无限层级语法。”

3. 图案会反复出现，并具有稳定频率

彭罗斯铺砌具有重复性。任何给定的有限图案都会在铺砌中一再出现，而且不会只偶然出现在某个遥远角落。对每个有限图案，都能找到一个足够大的观察半径，使任何这么大的区域里都能找到该图案的副本。

这比“有时会重复”强得多。它说明局部图案的复现距离受到控制。

同时，不同砖型和有限图案具有稳定的渐近频率。例如两类主要砖型的数量比例与黄金比例有关。观察区域越大，统计比例越趋向固定值。

物理上，彭罗斯铺砌还具有离散的衍射峰，也就是类似晶体的布拉格峰。周期性虽然消失了，长程取向和频率秩序却保留下来。这正是准晶体能够呈现清晰衍射图样的原因之一。

因此，彭罗斯铺砌的远方联系不能用“远处那块砖是否与这里完全相同”来衡量，而应问：

1. 某个图案是否一定会再次出现？
2. 它出现的频率是否稳定？
3. 不同尺度是否服从同一膨胀规律？
4. 整体是否具有清晰的傅里叶或衍射结构？

在这些意义上，彭罗斯铺砌与远方的联系非常强。

最准确的概括是：

彭罗斯铺砌缺少周期性的点对点记忆，却拥有层级性的结构记忆。

四、“弱”与“强”其实测量的是两种不同东西

现在可以解释为什么你会同时感到联系很弱和很强。

问题	普通周期铺砌	彭罗斯铺砌
远方指定位置能否由周期直接预测	可以	通常不可以
是否存在有限基本单元	存在	不存在
是否具有非零平移周期	有	无
局部规则是否限制全局	是	是，而且可强迫非周期
是否有无限层级结构	通常不需要	有明显膨胀层级
有限图案是否反复出现	是	是
图案频率是否稳定	是	是
有限窗口能否确定唯一整体	周期与相位已知时基本可以	不可以

所以，彭罗斯铺砌是：

- 1. **绝对地址关系弱**：不能从有限窗口知道自己在唯一整体中的位置；
- 2. **平移复制关系弱**：远方不是近处的周期副本；
- 3. **局部语法约束强**：相邻规则能够排除所有周期整体；
- 4. **层级关系强**：不同尺度服从膨胀和缩小结构；
- 5. **统计关系强**：图案频率与长程衍射秩序稳定；
- 6. **全局身份不唯一**：同样的有限局部可以属于不可数多个完整铺砌。

可以把它叫作：

弱地址、强语法；弱周期、强秩序；弱唯一性、强约束。

五、这和文章里的无穷着色有什么深层联系

伯恩斯坦研究建立的桥梁，把有限网络中的局部算法与无限 Borel 图上的规则着色联系起来。

有限一侧的问题是：

每个节点必须看多远，才能决定自己的颜色？

无限一侧的问题是：

能否给所有节点着色，并让每种颜色形成 Borel、可测或 Baire 可测的集合？

这两类问题都不是简单地问“解是否存在”，而是在问：

一个只由局部规则定义的问题，需要多少全局信息，才能得到一个规则整体？

圆周无理旋转图中的每条轨道都是一条可数无限路径。单独看每条路径，蓝黄交替毫无困难。但圆上有不可数多条轨道。若要同时二着色，就必须为每条轨道选择奇偶相位；这种全局选择可以产生普通意义上的二着色，却不能产生勒贝格可测的二着色。

这与彭罗斯铺砌有一种结构上的相似：

1. 一个有限局部图案可以合法，却不足以确定唯一整体；
2. 一个普通整体解可以存在，却不一定具有更强的规则性；
3. 局部约束可以允许很多全局相位；
4. 真正的困难不是每个局部能否工作，而是所有局部能否以统一、可描述的方式共同工作。

文章中的第三种颜色相当于增加一种修补自由度。它降低不同局部区域必须共享同一奇偶相位的要求。

彭罗斯铺砌则没有通过“多一种颜色”变简单。它采用另一种机制：用膨胀层级、匹配规则和不可公度尺度，把全局一致性储存在多尺度结构中。

二者共同揭示：

整体秩序的成本，不只取决于元素数量，还取决于局部区域需要共享多少全局相位。

六、这是不是哥德尔不完全定理造成的“无穷远壁垒”

严格地说，不是。

哥德尔第一不完全定理讨论的是满足特定条件的形式系统：它必须一致、可有效公理化，并且足以表达基本算术。定理说明，在任何这样的系统中，都存在系统内部既不能证明也不能否证的算术命题。

彭罗斯铺砌讨论的是几何对象、局部匹配和全局非周期性。它没有构造一个关于自身可证明性的自指命题，也没有表明某个彭罗斯铺砌的存在无法在给定公理系统中证明。

恰恰相反，彭罗斯铺砌可以明确证明存在，也可以明确构造。

因此不能说：

彭罗斯非周期性 = 哥德尔不完全性。

但你的联想并非毫无价值。二者在哲学上共享一种“有限规则不能穷尽所有全局信息”的感觉：

1. 哥德尔说明，足够强的有效形式系统不能证明其语言中的全部算术真理；
2. 彭罗斯铺砌说明，有限局部观察不能确定自己属于哪个完整铺砌；
3. 描述组合学说明，普通组合解存在，不代表存在 Borel 或可测的统一选择；

4. 分布式计算说明，局部节点不能立即知道远方，因此某些全局任务需要很长通信时间。

这些都是“局部或形式能力存在边界”的现象，但边界性质不同。

如果一定要为彭罗斯铺砌寻找更直接的逻辑亲属，那么**王砖的铺砌判定问题**比哥德尔定理更接近。

一般地，给定有限种带匹配规则的砖，不存在一个算法能够对每一组砖都判断它们是否可以铺满整个平面。这是铺砌问题的不可判定性，与图灵停机问题有直接联系。

但仍要注意：

一般铺砌问题不可判定，不代表具体的彭罗斯砖不可判定或不可构造。

我们已经知道彭罗斯砖能够铺满平面，也知道匹配规则强迫非周期性。不可判定性属于“所有可能砖组的统一判定程序不存在”，而不是“这组具体的砖神秘得无法研究”。

所以，你感受到的“壁垒”最好命名为：

有限观察无法锁定唯一全局相位的认识壁垒。

它不是严格的哥德尔壁垒。

七、“存在但不可构造”适用于彭罗斯铺砌吗

也不能直接这样说。

彭罗斯铺砌至少有三种明确构造方式：

1. 按膨胀或缩小规则反复替换；
2. 使用德布鲁因的五重网格；
3. 从五维晶格进行切割与投影。

这些都是具体方法，可以实际生成任意大的有限区域。因此，彭罗斯铺砌不是一个只能用非构造存在证明得到的对象。

但你的直觉可以通过更精确的区分得到保留。我们要把四种说法分开：

1. **某种对象存在；**
2. **至少能明确构造一个这样的对象；**
3. **任意指定对象都能由有限程序生成；**
4. **只靠当前局部信息就能唯一决定整个对象。**

对彭罗斯铺砌而言：

1. 第一项成立：彭罗斯铺砌存在；
2. 第二项成立：存在明确可计算的构造；

3. 第三项不成立：不可数多个彭罗斯铺砌中，大多数不可能分别由有限程序指定；
4. 第四项不成立：任何有限图案都不能唯一决定整个铺砌。

这里出现一个真正值得注意的可数与不可数差别。

有限程序只有可数多个，因为每个程序都是有限字符串。可计算、可有限描述的对象因此至多可数多个。可是完整彭罗斯铺砌有不可数多个。所以即使存在许多可以明确生成的彭罗斯铺砌，仍然必有大量具体铺砌不能由任何有限程序逐一指定。

这才是“存在但不可构造”直觉在此处的准确版本：

彭罗斯铺砌这一类对象是可构造的，其中也有具体可计算成员；但这个类包含不可数多个成员，因此绝大多数具体成员不可能各自拥有有限算法描述。

这和文章中的无穷二着色仍有区别。无理旋转图的普通二着色可以依靠选择公理存在，但不存在勒贝格可测二着色。那里缺少的是所要求的正则性；彭罗斯铺砌这里缺少的，是从有限局部信息到唯一全局成员的确定性。

八、不可公度、无理数和不可数无穷是什么关系

“不可公度”通常意味着两个长度之比不是有理数。彭罗斯铺砌中的黄金比例

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

就是无理数。

无理比值的重要作用，是破坏有限周期闭合。若两个尺度之比是有理数，就可能找到共同基本单位；若比值无理，就不存在一个有限单位同时整除两种长度。

这与文章中的无理旋转十分相似。

在圆上以无理步长 α 不断移动，轨道

$$x, x + \alpha, x + 2\alpha, \dots \pmod{1}$$

永远不会精确回到起点，却会在圆上稠密分布。每条轨道只有可数多个点，但圆周由不可数多个点构成，因此圆周会被分解成不可数多条彼此不相交的可数轨道。

彭罗斯铺砌的切割投影构造也使用一种与晶格不可公度的方向。高维周期晶格投影到二维后，周期消失，却保留准周期的长程秩序。

所以不可公度确实是连接这些现象的重要机制：

它让有限步进无法闭合成周期，却仍能产生稠密复现和长程结构。

但不可公度不等于不可数。

1. 一个无理数只是一个数；
2. 代数无理数的集合仍是可数的；
3. 黄金比例是无理数，却完全可以计算和构造；
4. 无理数全体是不可数的，但“某个比值无理”本身并不自动产生不可数多个对象。

不可数性通常来自可选择的全局相位、偏移或无限序列有不可数多种可能，而不是仅仅来自使用了一个无理比例。

因此，二者的准确关系是：

不可公度负责破坏周期闭合；不可数性负责容纳无法由有限局部信息逐一识别的众多全局相位。

它们经常共同出现，但不是同一个概念。

九、你这个观点最终可以怎样表达

你的想法经过校准后，可以整理成下面这段话：

普通周期铺砌与远方的关系很强，因为一个有限基本单元和一个全局坐标就能精确决定任意远处；这种强联系表现为平移重复和低描述复杂度。彭罗斯铺砌与远方的绝对位置关系较弱，因为任何有限窗口都不能确定唯一整体，也不存在周期坐标来预测指定远点。但它在另一层面与远方联系极强：有限匹配规则能够约束整个无限平面，任意有限图案都会受控地重现，不同尺度通过黄金比例形成无限嵌套，整体还具有稳定频率和清晰衍射结构。因此，彭罗斯铺砌不是缺少秩序，而是把秩序从“周期复制”转移到了“层级、统计与准周期关系”之中。 > 这种现象与伯恩斯坦研究中的有限局部算法和无限可测结构具有共同主题：局部能够看到多少，决定了它能以何种复杂度参与全局秩序。它与哥德尔不完全定理只有哲学类比，并非同一个数学障碍；更接近的逻辑问题是一般铺砌问题的不可判定性。彭罗斯铺砌本身并非不可构造，它有明确算法；但完整铺砌有不可数多个，而有限程序只有可数多个，所以大多数具体铺砌无法被逐一有限描述。不可公度比例破坏周期闭合，不可数性则来自众多可能的全局相位。二者共同制造了“局部高度有序、整体无法由有限视野唯一锁定”的奇异结构。

结论：真正奇怪的不是无序，而是没有中心的强秩序

彭罗斯铺砌最深的地方，不是它“乱”，也不是它“无法构造”。它真正改变的是我们对秩序的定义。

传统直觉认为：

如果远方高度有序，那么它应当重复近处。

彭罗斯铺砌却告诉我们：

远方可以不重复近处，仍然被近处所服从的规则深刻约束。

普通晶格的秩序依赖周期记忆。彭罗斯铺砌的秩序依赖层级记忆。前者通过重复消除未知，后者允许局部差异，却把差异限制在一个严格的准周期空间中。

因此，它的远方联系确实既弱又强：

1. 弱在你不能仅凭有限局部确定远方的具体面貌；
2. 强在远方无论怎样变化，都无法逃出同一套局部规则、频率规律和层级结构。

这不是哥德尔意义上的“真但不可证”，而更像：

整体可构造，却不能被任何有限窗口唯一认出；局部无法拥有全景，却始终携带着全局秩序的语法。

这也正好回应了有限网络与无穷图之间的桥梁。真正决定秩序难度的，不只是世界有多大，而是一个局部为了正确行动，需要知道多远；也不只是整体是否存在，而是这种整体能否被统一描述、测量、计算和识别。

无穷的壁垒未必是一堵禁止我们前进的墙。它有时是一条界线，迫使我们区分：

存在 $\neq$ 唯一 $\neq$ 可构造 $\neq$ 可计算 $\neq$ 可由局部识别。

彭罗斯铺砌的思想灵性，就生长在这些“不等于”之间。

参考资料

1. Joseph Howlett, “A New Bridge Links the Strange Math of Infinity to Computer Science,” *Quanta Magazine*, 2025.

<https://www.quantamagazine.org/a-new-bridge-links-the-strange-math-of-infinity-to-computer-science-20251121/>

1. Anton Bernshteyn, “Distributed Algorithms, the Lovász Local Lemma, and Descriptive Combinatorics,” *Inventiones Mathematicae* 233 (2023), 495–542.

<https://arxiv.org/abs/2004.04905>

1. N. G. de Bruijn, “Algebraic Theory of Penrose’s Non-Periodic Tilings of the Plane,” 1981.

<https://new.math.uiuc.edu/oldnew/quasicrystals/papers/debruijnPenrose.pdf>

1. Michael Baake and Uwe Grimm, “Aperiodic Order and Spectral Notions,” *Notices of the American Mathematical Society*, 2023.

<https://www.ams.org/journals/notices/202308/noti2759/noti2759.html>

1. Panu Raatikainen, “Gödel’s Incompleteness Theorems,” *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

<https://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/>

1. Emmanuel Jeandel and Pascal Vanier, “The Undecidability of the Domino Problem,” lecture notes.

<https://www.lacl.fr/pvanier/rech/cirm.pdf>