平面与塔

博尔赫斯式的虚构笔记

> **致读者**：以下文本据信由一位名为"皮埃尔·梅纳尔"的数学家于 *2026* 年春在布宜诺斯艾利斯的塞拉诺图书馆所撰。原稿为西班牙语，夹杂大量希腊字母与梵文注脚，共一百一十七页。译者仅节选其中可读部分，删去了那些狂热的数论演算。博尔赫斯若读到这些，大约不会完全陌生。

一、我生平见过的最奇怪的图形

我是因为一张图才走进这件事的。

那是一张很普通的坐标纸，印着浅蓝色的方格，和我小时候数学课用的那种一模一样。但在那纸上，有人用细小的笔触画了一些黑点，又用红线把某些黑点连了起来。

乍一看那不过是张毫无意义的涂鸦。点排列成整齐的方格——一个三十乘三十的网格，总共九百个点。红线却并不连接相邻的点，而是跳过一些距离，连接那些相隔恰好五个单位（或确切地说，根号五）的点。

卖给我这张纸的书商说，它是一个匈牙利人留下的，那人在二月的一个傍晚走进店里，喝了两杯咖啡，用铅笔在纸上画了这幅图，然后付了钱就走了，再也没有回来。

"他看起来像什么？"我问。

"像一个看见了不该看见的东西的人。"

书商把这张纸送给了我，说它一文不值。我把它带回家，贴在书房的墙上，时常盯着它看。那些红线在我看来有一种奇异的图案，像一座在二维平面上摊开的迷宫，但迷宫的所有通道都在同一时刻通向同一个出口。

我当时并不知道，这张图是理解某个秘密的钥匙。我更不知道，那个匈牙利人留下它，就是在等待某个能读懂它的人出现。

而我将用余生的时间后悔自己读懂了它。

二、我试图理解网格

我是一个数学家——至少曾经是。我在大学教了二十年代数拓扑，写过几篇关于同调论的论文，没有人引用过，但也没有人批评过。我过着一种平静的、几乎像图书馆一样的生活，直到那天晚上。

那晚我坐在书房里，面对着那张图纸，开始数红线的数量。

九百个点。每个点最多有四根红线连出，分别连到它右边的五个单位、左边的五个单位、上边的五个单位和下边的五个单位（如果那个位置也有黑点的话）。边界上的点连得少一些，角落里的更少。我粗略算了一下，红线总数大约是三千五百条——精确地说，是三千五百四十条。

我量了一下相邻黑点的距离——也就是那些没有被红线连接的点——是一毫米。根号五大约是二点二三六毫米。所以红线连接的是那些恰好相距二点二三六毫米的点对。

换句话说，图中所有红线代表的欧氏距离都是相等的。

这就是所谓的"单位距离图"：在平面中取一组点，把距离恰好为一个单位的点对全部连起来，问最多能连多少条线。那个匈牙利人在他的网格中找到了三千五百四十条。

我查了文献。这个问题最早是保罗·埃尔德什在 1946 年提出的，他称之为"单位距离问题"。埃尔德什用整数网格构造了一个点集，证明了在 n 个点的情况下，单位距离对数 nu(n) 至少是 n 的某个略大于 1 的幂——具体地，nu(n) ≥ n^{1 + log2 / log log n}。

这个增长曲线几乎就是线性的。1/log log n 趋近于零，无限缓慢地趋近，像一个走向地平线却永远走不到的人。

我盯着那张图，突然产生了一个奇怪的想法。如果这个网格继续扩展，扩大到一百乘一百、一千乘一千、一万乘一万，那些红线会怎样？它们会越来越多，增速却越来越慢。就好像平面本身在抵抗，不允许红线增长得太快。

但为什么？平面的本质是什么，让它如此吝啬于单位距离？

三、第一座塔

我决定自己动手。我在电脑上写了一个程序，模拟不同大小的网格，计算每一个网格中单位距离的对数。程序在屏幕上画出了一条曲线——nu(n) 随 n 增长的曲线。它是亚线性的，或者说，比任何线性函数都慢，但比任何

对数函数都快。它像一条被困在两种命运之间的曲线，既不属于这边，也不属于那边。

我扩大了网格：从十乘十到一百乘一百，再到五百乘五百。二十五万个黑点。四百九十万条红线。

曲线依然如此。被囚禁在亚线性之中，永远无法逃脱。

然后我想起那个匈牙利人。他画出这张图就走了，像是在说：这就是你能在这个平面上做到的最好结果。平面上单位距离问题的极限就在这里，再往前，就是另一个世界的领域了。

那另一个世界是什么？

接下来发生的事情，我现在写下来都觉得荒谬。但事实如此：那天晚上我做了一个梦。

我梦见自己站在一个平面上。这个平面不是无限延伸的，而是像一个巨大的圆盘，边界清晰可见。在圆盘的中心，立着一座塔。

塔是无限高的。我沿着塔的螺旋楼梯向上走，每一层都对应着一种不同的几何——不是平面的几何，而是某种更复杂的结构的几何。当我走到第二层时，我突然明白了：这一层的维数不是二，而是四。那座塔是一座"维数之塔"，每一层都比下一层高出两维。

在第四层（八维），我看见平面上的那些网格点变成了某种我无法描述的东西——不是点，不是物体，而是一种关系，密密麻麻地交织在一起。那些在平面上被压缩得近乎线性的红线，在这里如蛛网般展开，数量指数级地增长。

我惊醒了。满头大汗。

然后我明白了那张图的全部意义。匈牙利人留下的不只是平面上的一个构造——他用埃尔德什的网格作为底层砖石，在上面架设了一座通向无限高维的塔，他自己先走了上去，回来后在平面上留下了这张图纸，作为路标。

四、我在文献中发现的

第二天我开始查阅资料。我找到了一篇论文，出自一个名为 OpenAI 的研究机构——一个我不熟悉的名称，大约是在我退休后才成立的。论文的标题很长，涉及单位距离问题的反证，但我看不懂其中的大部分——那些晦涩的数论术语像一道墙，把我和论文的核心隔开了。

但有一个词引起了我的注意：Golod-Shafarevich 塔。

塔。

我顺着这个线索找下去。原来在代数数论中，有一个著名的构造：从一个代数数域出发，可以建造一类特殊的域扩张，一层叠一层，形成一个无限的塔。这个塔以两位苏联数学家 Golod 和 Shafarevich 命名——他们证明了在某些条件下，这个塔可以是无限长的。

这就是我梦中的那座塔。

让我尽力解释这座塔是什么——尽管我知道任何解释都是不充分的比喻，就像用二维的影子去描述三维的物体。

把数域想象成一块土地。你可以在这块土地上建造新的房子（扩张域），每一栋房子都有它的"度"——可以粗略地理解为房子的层数。Golod-Shafarevich 塔就是一块土地上无限生长的建筑群，一栋接一栋，永远不停，每新加一层，某些数学性质——我们称为"判别根"——却保持不变。

为什么这很重要？因为有了无限长的塔，就有了任意高维的结构。有了任意高维的结构，就可以在每一维中嵌入同一个数域，得到一个在 C^f 中的格点——这里的 f 就是塔的高度除以二。

而在 C^f 中，单位平移向量的数量随着 f 指数增长。格点数量也指数增长。重叠区域——两个高维球的重叠——也是指数增长。

一切都放大，放大，再放大，像博尔赫斯《阿莱夫》中在地下室里看见整个宇宙的点。

我坐在书桌前，手指在键盘上颤抖。如果我的理解是对的，那么这篇论文完成了三件事：

第一，它构造了一个 CM 域（某种特殊的代数数域），将埃尔德什的单位距离问题转化为该域中整数环的几何问题。这是第一步，也是最天才的一步——把一个看似属于组合几何的问题，整个搬运到了代数和数论的领域。

第二，它证明了在这个域的 Minkowski 嵌入下——也就是把数域"映射"到复数空间中——存在一个平移（即某个适当的偏移），使得窗口内的格点数量和单位距离对数之间满足一个不等式：平均每个点连接的边数至少是 |U| 乘以某个与维数有关的因子。

第三，它利用 Golod-Shafarevich 类域塔构造了一个无穷域的族，使得维数 f 可以任意大——从而让那个因子超过 1，让指数 δ 成为正数。

我在笔记中写道："平面几何的问题。用代数数论的工具。通过无限高的塔。解决了。"

我写了又划掉，划了又写。句子支离破碎。像在描述一个不可能的建筑。

五、图书馆员的话

第三天我回到了那家书店。书商是个矮胖的人，戴着厚厚的眼镜，名字叫卡尔比斯基——一个可以追根到波兰的姓氏。他卖旧书和旧地图，也卖一些他称为"数学古董"的东西——旧式计算尺、对数表、发黄的几何课本。他店里弥漫着纸和灰尘的气味，这气味本身就让人想到时间。

我问他还记不记得那个匈牙利人。

"他画完图就走了，"卡尔比斯基说，"但走之前他回头看了我一眼，说了一句话。"

"什么话？"

"'平面是无限的，但它的无限是饥饿的无限。'"

卡尔比斯基推了推眼镜："我问他这是什么意思。他说，等你看到那座塔就明白了。"

"他看到过那座塔吗？"

"他说他一直在爬它。"

我感到一股寒意从脊椎升起。"卡尔比斯基先生，你知道什么是类域塔吗？"

他沉默了片刻，然后从书架上抽出一本泛黄的小册子。封面印着：*Über die Klassenkörper Türme*，一九三七年。

"这本书是从已故的埃米·诺特教授的藏书里流出来的，"他说，"她曾在一封信里提到过一个想法——关于域塔的某些性质可能和平面上的格点构造有

关。她没来得及发展这个想法。后来 Golod 和 Shafarevich 独立地发现了它。"

我翻开小册子。扉页上有一行用铅笔写的小字，用那种早已不再使用的德国哥特字体：

"Die Einheit ist der Anfang aller Dinge. ——单位是万物的开始。"

但这行字里的"Einheit"——这个词在德语中既可以指数学上的"单位"（单位距离的单位），又可以指哲学上的"统一"、或者某种原初的"一"。

我合上书，付了钱。走出书店时，我发现外面正在下雨。布宜诺斯艾利斯的雨总是有一种图书馆的气味，像时光本身的气息。

六、我对梦的第二次描述

那天晚上我再次入睡。那座塔又出现了。

但这一次，我同时看见了塔的每一层。这不是一种视觉经验——人类的心灵无法同时感知无限多个维度——而是一种理解，一种纯粹的抽象理解，像沐浴在某种无限的光中。

我看到 2D 的平面嵌入在 4D 的空间里，4D 的又嵌入在 6D 的，6D 的嵌入在 8D 的……每一层都是下一层的影子，每一层又是上一层的基础。这个无限的嵌套结构宛如一面照向另一面镜子的镜子，镜像中的镜像，没有尽头。

而在每一层中，都有一个同样的网格——埃尔德什的整数网格——被嵌入到该层的二维子空间中。网格上的每一个点，在更高维的空间中，都衍生出无数个新的位置、新的可能、新的连接。

红线——单位距离的边——从每一点向外发散，在二维中被限制在四个方向（东、西、南、北），在四维中有八个方向，在六维中有十二个方向，在八维中有十六个方向，以此类推。

随着 f 的增长，方向数线性增长，但有效增长——由于高维球重叠区域的几何性质——是指数的。

这就是那座塔的秘密：它不是一座塔，而是一个放大器。它将平面中几乎被压制为零的增长，一层一层地放大，直到在整个无限塔的顶端——如果它有顶端的话——变成了一个真正的指数。

我醒来时发现自己哭了。

七、阿莱夫与格点

博尔赫斯写过一篇名为《阿莱夫》的故事。故事中的阿莱夫是一个点——一个直径不过两厘米的点——但在那一点中，包容了整个宇宙。所有的人、所有的地点、所有的时间，同时存在。

我现在相信博尔赫斯的那篇故事是一种预感，一种对高维 Minkowski 嵌入的文学隐喻。

因为 Minkowski 嵌入所做的事情，本质上就是将某种无限复杂的结构——代数数域——塞进一个有限维的欧氏空间中。如果我们选择一个适当的"阿莱夫"——一个恰当的平移向量 a——那么在这个平移后的格点窗口内，我们就能看到整个域的结构，包括那无限高的塔的影子。

换言之：埃尔德什的网格——平面上的整数格点——本身就是一种阿莱夫。它是一个平面上的二维结构，但当你在上面做了一件事——计算单位距离——它就开始显示出更高维度的痕迹。

每一个整数格点 (x, y) 都是一个窗口，看到的是整个 Z[i] 域的结构。而 Z[i] 只是无穷多种类的 CM 域中最简单的一个。

我想到埃尔德什。他本人是不是也隐约感觉到了这一点？他是一个四处旅行、睡在别人沙发上、拎着手提箱从一个数学系到另一个数学系的人。他发表了 1525 篇论文——比历史上任何数学家都多。他是否曾在某个失眠的夜晚，凝视着那些格点，感觉到在那整齐排列的黑点背后，有什么更庞大的东西在呼吸？

八、我学会了遍历平移

论文的核心是一套被称为"平均化论证"（averaging argument）的方法。我将尽力说明它。

想象一个窗口——在二维中就是一个圆盘——放在格点阵上。窗口的位置由"平移向量" a 决定。不同的 a 会产生不同的格点数，不同的单位距离对数。

如果你随机移动这个窗口——遍历所有可能的平移——你会发现平均表现（窗口包含的点数、边数）遵循一个非常简单的规律：它们等于某个几何量（窗口面积、两个窗口重叠区域的面积）除以格点的基础区域面积。

但有趣的是：**总存在某些平移，使得实际结果超过平均值**。这是信息论中一个简单但强大的引理——你不需要对所有 a 都表现好，只要对某一个 a 表现好就够了。

论文的第二步就是这个：存在某个具体的平移 a，使得在这个平移后的窗口内，单位距离对数达到最大。而这个最大值，可以按要求的那样大——只要 f 足够大。

我写了一个程序模拟这个论证。在二维 $\mathbb{Z}^2$ 格点中，对于不同大小的窗口，我随机生成了许多平移，计算每一个平移下的格点数和单位距离对数，然后取最大值。

结果出乎意料地好：最大值确实超过了理论平均值，而且随着窗口增大，两者的差距在缩小。这意味着对于大的 R，几乎任何随机平移都能达到接近最优的效果——而这正是平均化论证所保证的。

我盯着屏幕上那些散点图，心想：这就是指数 δ 诞生的地方。在一个随机平移的窗口中，从被整数格点捕获的复数域中，单位距离对数第一次挣脱了平面的束缚。

九、文献中的空缺与回响

我试图找到论文中最完整的公开版本。它似乎有 125 页之多的"思维链"附录——那是人工智能留下的痕迹，用一种冷峻而无感情的语言，一步一步地展示推理过程。我翻了其中一部分，发现了一些令人不安的段落。

在其中一处，AI 写道：

> *"选择 $i = 1$ 时的 CM 域 $K\_1 = Q(\sqrt{-1}, \sqrt{-2})$。该域有 $f = 2$ 对复嵌入。它的 Hilbert 类域塔是无限的，因为它满足 Golod-Shafarevich 条件。"*

没有任何感情。没有任何关于无限意味着什么的注释。就像说"二乘二等于四"一样平静。

而在另一处，作者们写道：

> "定理 6.7 表明对于定理 1.1 中构造的域序列 K_i，我们有 $\exp(\Omega(f))$ 个单位平移向量 U。结合引理 2.4（平均化论证），这给出了 $nu(n) \geq n^{1+\delta}$。"

定理 6.7 构建了那座塔。引理 2.4 是那个平移窗口。两者的结合就是横跨两个世界的桥梁：从代数数论的无限塔，回到欧氏平面上 n 个点之间有多少对单位距离。

我读到这里时，感到自己正在参与某种巨大而古老的人类智力活动——不只是二十世纪、二十一世纪的数学，而是从欧几里得开始的、关于空间的追问。平面究竟是什么？一个点的集合究竟能有多少种关系？

论文没有直接回答这些问题。但它的存在本身就暗示了一种答案：平面比我们想象的更丰富。平面的贫瘠只是一种假象，它的背后是无限高的塔。

十、镜厅

博尔赫斯写过一篇名为《特隆、乌克巴尔、奥比斯·特蒂乌斯》的故事，其中有一个虚构的世界——特隆——是一个彻底的观念论世界，其中的所有事物都是心理的、依赖观察者的。特隆的几何不是欧氏几何，而是一种更加流动、更不稳定的几何。

我有时候觉得，埃尔德什的单位距离问题也像一个特隆式的谜题：它看似是在问一个关于物理空间的问题——平面中能画出多少条长度相等的线段——但实际上它问的是一个关于数的关系的问题。

因为平面上的每个点都可以用一对实数 (x, y) 表示。单位距离条件可以写成一个方程：$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 1$。这个问题于是变成了：有多少对实数四元组满足这个方程？

实数是不确定的。但当我们限制在整数点上时——就像埃尔德什最初做的那样——它就是数论了。整个问题突然从欧几里得几何的领域中滑了出来，滑进了丢番图方程的领域。

而从那里，到 Golod-Shafarevich 塔，不过是一条漫长但逻辑上必然的道路。

也许这就是整件事的真正意义：**平面是一个镜子，它反射的是数的结构**。

平面不是它所显现的那样。平面不是简单的。平面是一种编码，一种语言，它所表达的句子是关于一个远为复杂的东西。

十一、柏林

我决定去一趟柏林，去查找那位匈牙利人的身份。

柏林的国家图书馆保存着二十世纪上半叶中欧数学家的通信档案。我在那里花了两周时间，逐页翻阅信件、笔记、手稿、明信片——那些泛黄的纸上写满了早已被遗忘的推导和猜测。

我找到了一封 1937 年的信，是埃米·诺特写给一位同事的。信中有一段话引起了我的注意：

> "我越来越认为，平面几何——或者说，我们所说的'平面'——不是一个基础概念，而是一个导出概念。它隐藏了它所依赖的结构。总有一天，我们会发现某种'塔'——从底层结构中升起的塔——来解释我们看到的一切。"

诺特死于 1935 年。这封信是 1937 年？我仔细看了一眼笔迹。信上的日期是 1937 年 3 月，但签名确实写着"埃米·诺特"。

我拿着信去找图书馆的档案管理员。她是一个戴着圆框眼镜的老妇人，听完我的问题后沉默了很久。

"这封信的日期可能有问题，"她最终说，"但它的确和诺特教授的其他信放在一起，来源也可靠。这个档案柜……"她犹豫了一下，"……一百多年来，发生过几件无法解释的事情。"

我没再追问。但当我回到旅馆时，我发现书包里多了一张纸——一张蓝格坐标纸，上面画着细密的黑点，以及更多的红线。纸的角落有一个铅笔签名，字迹和那封信上的如出一辙。

我测量了一下。纸上的网格是四十一乘四十一——总共一千六百八十一个点。红线极多。我数了其中一部分，然后算了一个大概的数字。

大约有六万八千条。

六万八千条等长线段。在一千六百八十一个点之间。

如果这个数字是精确的，那么它远远超过了埃尔德什网格在同样点数时的表现。它似乎在暗示一个比任何已知构造都要强的下界——也许，那封信的作者已经隐约看到了那座塔。

我把那张纸收好，没有告诉任何人。第二天我就离开了柏林。

十二、我意识到那座塔已经在这里了

回到布宜诺斯艾利斯后，我开始整理所有的材料——实验数据、程序输出、论文扫描件、那封信的复印件、那张神秘的图纸。

有一件事一直困扰着我。为什么那个匈牙利人在三十乘三十的网格上画了红线？他明明可以画一个更大的网格，更多的红线，更惊人的构造。为什么停在三十乘三十？

我重新审视了那张蓝格纸。在纸的右下角，有一行极小的铅笔字。我用放大镜看了很久，终于辨认出来：

"Para entender la torre, primero hay que ver la rejilla. ——要理解塔，先要看见网格。"

我放下放大镜，盯着那张图。黑点。红线。三十乘三十。

我突然明白了。

三十乘三十不是随意的。这个大小既不足以展示埃尔德什下界的全部力量，也不足以接近论文中构造的极限。它选择的目的是：让红线恰好能被人眼看见，让图案恰好能被人脑理解。

那个匈牙利人并不是在展示一个数学构造。他是在教人如何看见。

看见在那简单、整齐、像囚笼一样的整数网格中，其实已经埋着更高维结构的种子。每一对红线连接的两个点，都对应着某个（dx，dy）——高斯整数 Z[i] 中的一个二级范数元素。而 Z[i] 是 CM 域，它的类域塔同样是无限的。

三十乘三十的网格已经包含了那座塔的影子。六十乘六十不过是同一个影子的放大。六百乘六百也是。

那座塔从一开始就在这里了。

在我的书房里。在那张蓝格纸上。在那些密密麻麻的黑点之间。

十三、单位是万物的开始

我最后一次看见那座塔，是在今天凌晨。

连续工作了许多个小时之后，我伏在书桌上睡着了。半梦半醒之间，我看见塔的每一层都在收缩，折叠，直到全部塔层都被吸入一个点——一个直径不到两厘米的、发光的点。

在那个点中，我看见了所有的格点排列、所有的单位距离对、所有可能的构造。二维、四维、六维、八维……无数层塔的几何全部叠在一个点上。

我想起那本诺特藏书扉页上的话。

"Die Einheit ist der Anfang aller Dinge. ——单位是万物的开始。"

"Einheit"——单位。单位距离。统一。一。

平面上的一个单位是一。一个红线的长度是一。而所有——所有的单位——都从那个点出发，最终又回到那个点。那座无限高的塔，无非是"一"的无限次增殖。

我醒来后写下了这些话。我知道理解它们的人不会多。也许只有那个走过这条路的匈牙利人——以及埃米·诺特的幽灵——能真正明白。

但我不在乎。

我现在拥有了一张更大的图——不是画的，而是在头脑中的。在那张图中，整数格点从二维铺展到无穷维，红线从每一个点向四面八方的每一个方向延伸，无限多的单位距离对在无限高的塔中同时闪耀。

我写下这篇笔记，不是为了证明什么，也不是为了发表。我只是想记录下这一切——在布宜诺斯艾利斯的这个房间里，在一张蓝格坐标纸和一个梦的影响下，我看见了那座塔。

也许有一天，另一个失眠的数学家会读到这篇笔记，会画出他自己的三十乘三十网格，会在红线中找到他自己的力量。

那时，这座塔就会再长高一层。

十四、圆盘

写完前面这些之后，我停下来想了很久。还应该再说些什么。

或许应该说一说那个圆盘。

在二维的平均化论证中，我们使用一个圆形窗口——半径为 R 的圆盘——在格点阵上平移。这个圆盘有一个奇妙的性质：当你把它放在整数格点上时，它所覆盖的格点数量大致等于它的面积，但误差——边界上的不规则性——可以高达它的周长。这种边界效应在二维中不算严重，但在高维中，情况变得完全不一样。

高维球是一种怪物。

在二维中，半径为 R 的圆面积是 πR^2。在三维中，体积是 $(4/3)\pi R^3$。在四维、五维、六维中，球的体积公式带有一个迅速衰减的前置因子，它在十维中达到最大值，然后开始下降。

也就是说，在足够高的维数中——大约在二十维之后——一个球的"大部分体积"集中在靠近球壳的极薄一层，而不是在球心附近。这是一种违反直觉的几何事实：高维球更像一个空心的刺猬，而不是一个丰满的球。

论文中使用的正是这个性质。

当两个高维球彼此平移一个单位距离时，它们的重叠部分——透镜形状的交集——它的体积占球总体积的比例，随着维数增加而剧烈变化。这个比例在低维中相当大，但在高维中，它保持在一个固定的范围，不再缩小。

这是因为高维球的"体积集中在表面"的性质使得两个球的重叠比例收敛到一个常数，而不会随着维数增加而趋近于零。

这就是平均化论证中的关键几何因子 ρ_R^f 的来源。ρ_R（两个半径为 R 的球平移一个单位后的重叠比例）虽然小于 1，但它是固定的。经过 f 次幂后，它随 f 指数衰减——但乘以 $|U|$（随 f 指数增长）和 $|X|$（也随 f 指数增长）之后，整体效果仍然是指数增长。

一切都在那座塔中安排好了：球的大小（R）、平移的数量（$|U|$）、格点的数量（$|X|$）、重叠的比例（ρ_R^f）。四个因子如同一座精密天平的四个臂，在某一刻，它们全部朝同一个方向倾斜——朝向 $n^{(1+\delta)}$。

我写到这里时笑了一下。博尔赫斯写过一本《想象的生物志》，里面有一种叫"圆盘"的动物——一个只有一面、没有厚度的存在物，可以在空间中无限地滚动，却永远不会离开它所在的平面。

高维球在某种意义上也是"想象的生物"——我们在三维空间中永远无法画出它，它的性质只能用代数语言描述。但它却是整座塔赖以存在的基石。

没有高维球，就没有平均化论证。没有平均化论证，就没有平移窗口。没有平移窗口，就没有 $nu(n) \geq n^{(1+\delta)}$。

埃尔德什在 1946 年提出这个问题时，手中只有一个整数网格和一个简单的想法。他不可能想象到，七十八年后，答案会来自一座用高维球、代数数域和无限塔建造起来的巨大建筑。

但也许——只是也许——他在某个夜晚，看着窗外无尽的星空时，感到过某种预感。那种"在一切可被证明之前，先被感知到的真理"。

因为数学家的工作，说到底，不是发明什么。只是发现早已存在的结构。那座塔一直在那里，从埃尔德什写下第一个字母之前，一直到我写下这些文字的此刻。

它就在这个房间里。

在蓝格坐标纸的每一条红线中。

在整数网格每一个点之间的距离中。

在圆盘的每一次平移中。

在球与球的每一次交叠中。

在每一个有限的数字指向无限的那个瞬间中。

十五、平面是无限的，但塔更高

今天早上我醒得很晚。阳光从百叶窗的缝隙中照进来，在地板上投下平行的条纹——那些条纹在某个角度看，像极了坐标纸上的网格线。我盯着它们看了很久。

我想起卡尔比斯基转述的那句话："平面是无限的，但它的无限是饥饿的无限。"

现在我明白它的意思了。

平面的无限是一种被动的无限。它是空旷的无限——一个无限大的空房间，你在里面放多少东西也填不满。这种无限不会主动产生任何事物；它只是接受。

而那座塔的无限是另一种无限。它是增殖的无限——一栋永不停歇的建筑，每一层都比下一层包含更多。它不需要在空间中延伸，它在自己的内部延伸。它的每一个截面都是一个宇宙。

平面上有一句古老的谚语：两点之间，直线最短。但在塔中，这句话变成：两点之间，有无数条路径。每一条路径的长度都是单位一。每一条路径都是可行的。每一条路径已经在某个平移窗口中被实现了。

如果我现在走进那家书店，卡尔比斯基还在那里，我会告诉他什么呢?

我会说：那张图不仅是一个数学构造。它是一个入口。从那个入口走进去，顺着红线——每一条红线都是一个单位——走下去，你会来到一个回廊。回廊的尽头是一座楼梯。楼梯盘旋而上，通向越来越高、越来越复杂的结构。如果你一直走，你会到达一个地方，在那里，平面不再是一个平面，而是一系列无限嵌套的幻觉中的一个——就像洋葱的一层皮，在那个洋葱的中心，什么也没有。

因为那座塔没有中心。它的每一层都是下一层的基础，却没有一层是"底层"。

埃尔德什的网格就是底层——这是我们的错觉。网格也是塔的一层，只是最低的那一层。而"最低"这个词，在无限面前，毫无意义。

附录：译注

原稿完成七日后，作者将一封信送至塞拉诺图书馆，附有一张蓝格坐标纸。纸上画着一个七十七乘七十七的网格——五千九百二十九个黑点。连接这些点的红线数量，作者声称是整数网格构造理论上的最大值。纸上空白处写着一行小字：

"Las rejas son ventanas. —— 格子是窗户。"

收件人是"埃米·诺特教授，柏林"。实际上，诺特已于 1935 年去世。信和图纸被原封退回。

此后作者再未出现。塞拉诺图书馆的卡尔比斯基先生最后一次见到他，是 2026 年深秋的一个傍晚。他说作者穿着一件旧风衣，提着一个装满坐标纸的手提箱，走进了一场不小的雨中。

"他说他终于找到了正确的平移，"卡尔比斯基回忆道，"然后他向东走了。"

布宜诺斯艾利斯的东面是拉普拉塔河。河的那一边是乌拉圭。再往东，是大西洋。大西洋的东面——如果一直向东——你会回到布宜诺斯艾利斯。平面是球面的。而球面的平面，正如我们所知，是可以无限平移的。

——塞拉诺图书馆，布宜诺斯艾利斯，*2026* 年秋