矩阵力学与波力学的等价性问题（上）——深度导读与解析报告

1. 摘要与引言：量子力学的两种面孔

1.1 原文完整译文

摘要

1925年9月，玻恩（Born）和约当（Jordan）构造了矩阵力学，这标志着量子力学获得了一种分立的形式；同年底，兰佐施（Lanczos）构造了积分方程形式的量子力学，并提出了不同量子力学形式之间的等价性问题。1926年，薛定谔（Schrödinger）构造了微分方程形式的量子力学——波力学。在发表其分四部分的论文过程中，薛定谔专门撰文讨论了矩阵力学与波力学的等价问题。其后，泡利（Pauli，其文稿直到1973年才被发现）、艾卡特（Eckart）、狄拉克（Dirac）以及狄拉克的导师福勒（Fowler）等人均论述过这两种量子力学的等价性。基于严谨数学的等价性探讨见于冯·诺伊曼（von Neumann）自1927年起的系列论文，并最终在《量子力学的数学基础》一书中得到了系统阐述。矩阵力学与波力学本质上都是本征值问题，最终归结为抽象希尔伯特空间（Hilbert space）内在结构的不同实现方式。矩阵形式、积分方程形式和微分方程形式都是量子力学发展过程中的必然形态，（状态）函数、矩阵、算符均是统一的量子力学的要素。

关键词：矩阵力学，波力学，等价性，积分方程形式，微分方程形式，本征值问题，量子条件，正则对易关系，外尔关系，抽象希尔伯特空间，同构

0 引子

在发表了分四部分的"量子化作为本征值问题"一文的第一、第二部分后（收稿日期分别为1926年1月27日和1926年2月23日），薛定谔急忙提交了题为"论海森堡—玻恩—约当的量子力学与我的量子力学之间的关系"的论文（收稿日期为1926年3月18日），以下简称"论关系"。由此，量子力学两种表示的等价性证明成为了当时量子力学研究的热点问题。

薛定谔的微分方程形式与此前玻恩—约当的矩阵形式截然不同，甚至表现出分立性与连续性的对立，这自然引发了关于这两种理论是否等价的疑问。实际上，在薛定谔的波力学之前，兰佐施（Cornelius/Kornel Lanczos, 1893—1974）就已经给出了积分方程形式的量子力学，并提出了基于分立性和连续性表示的不同量子力学之间的等价性问题。遗憾的是，兰佐施的量子力学在一般的量子力学文献中常被忽视，原因不明。事实上，所谓的微分方程形式量子力学与矩阵形式量子力学的等价性证明，最终还是由冯·诺伊曼利用积分核理论完成收官的，由此可见积分方程版量子力学的价值。

系统地研究关于两种量子力学等价性的原始论文，有助于深入理解量子力学的思想基础和数学基础。此外，通过仔细研读量子力学初创阶段的这些原始论文，大致可以看清玻恩、约当创造的矩阵力学是

如何被安到海森堡头上的过程。量子力学实际上是玻恩在1924年创立的。量子力学及其矩阵形式（Born—Jordan)、积分方程形式（Lanczos）与微分方程形式（Schrödinger)，至少从概念、构建过程与内容来看，有所不同甚至各有侧重才是合理的。今天我们所学习的量子力学，可以看作是冯·诺伊曼公理化以后、具有坚实数学基础的统一的量子力学（unified quantum mechanics)。这或许才是1923/1924年玻恩所期待的超越原子力学（Atommechanik）的那个新力学。矩阵力学、波力学以及积分方程形式的量子力学，还有后来的路径积分版量子力学，都是量子力学的不同形态或不同侧面。

1.2 专家视角的背景补充与深度解析

本段引言揭示了量子力学发展史上最为激动人心且充满争议的篇章之一：**理论形式的多元竞争与统一**。

1. **被遗忘的时间线与优先权**：
   通常的教科书叙事往往将量子力学简化为"海森堡提出矩阵"和"薛定谔提出波动"的双雄对决。然而，依据曹则贤的研究及相关科学史料[1]，兰佐施（Lanczos）早在1925年底——即在薛定谔发表波力学之前——就已经构建了基于积分方程的连续场论形式。兰佐施的工作实际上是连接离散（矩阵）与连续（波动）的第一座桥梁。他敏锐地发现，海森堡的运动方程与积分方程理论中的格林函数方法存在内在联系[3]。这种历史修正主义的视角对于理解科学发现的非线性特征至关重要。
2. **"等价性"的数学实质**：
   薛定谔急于证明等价性，部分原因是为了赋予他的波函数以物理合法性，同时也为了回应当时物理学界对矩阵力学"缺乏直观性"（Anschaulichkeit）的普遍焦虑[5]。然而，早期的等价性证明（包括薛定谔本人和艾卡特的工作）在数学上并不严格。当时处理的算符往往是无界的（unbounded operators)，而矩阵力学中的矩阵在希尔伯特空间中并不总是良定义的[7]。直到冯·诺伊曼引入了希尔伯特空间的可分性（separability）和算符理论，真正的数学同构（isomorphism）才得以确立[9]。
3. **玻恩的角色重估**：
   文章暗示了玻恩在矩阵力学诞生中的核心地位。事实上，海森堡最初的论文仅给出了乘法规则的概念，是玻恩识别出这就是线性代数中的矩阵运算，并与约当一起完成了形式化构建[11]。将矩阵力学完全归功于海森堡，忽略了玻恩在数学结构上的决定性贡献。

1.3 面向高三学生的嵌套学习：量子世界的"多语种"翻译

同学们，欢迎来到物理学史上最精彩的"诸神之战"现场。

想象一下，你们正在解一道超级难的物理题，比如预测一个电子在原子里怎么运动。这道题太难了，以至于当时的物理学家分成了两派，他们用完全不同的"语言"在吵架。

- **A队（哥廷根学派)：** 队长是海森堡，队员有玻恩和约当。他们递给你一张巨大的**电子表格**（也就是**矩阵**)。这个表格大到无穷无尽，里面的数字代表了电子在不同能量状态之间跳跃的概率和强度。他们告诉你："别问电子的轨道是什么样，别问它在哪，只看这些数字的运算规则。答案就在

表格的乘法里。"这就是**矩阵力学**，它是**分立**的，像一个个跳跃的台阶，或者像你玩的《我的世界》（Minecraft），全是方块。
- **B队（苏黎世学派）：** 队长是薛定谔。他递给你一个看起来很丝滑的公式（也就是**微分方程**）。他告诉你："电子其实是一种波，就像水波一样在空间中弥漫。你解这个方程，就能看到波的形状。"这就是**波力学**，它是**连续**的，像一条流动的河。

为什么会有"等价性"的问题?

这就好比你和你的同桌用两种完全不同的方法解同一道数学题。你用的是几何画图（波力学），他用的是代数计算（矩阵力学）。过程完全不同，甚至用的符号都不同，但最后算出来的答案（比如氢原子发光的频率）竟然一模一样！

这时候你肯定会好奇：这两种方法是不是本质上是一回事？还是说我们只是凑巧碰上了？

这篇文章要讲的，就是物理学家们如何发现这两种看似水火不容的理论——一个全是整数和表格（分立），一个全是波函数和导数（连续）——其实是同一个真理的"两张面孔"。

我们要特别关注一位被遗忘的大神：兰佐施（Lanczos）。

在薛定谔还没搞出波动力学之前，这位"火星人"（当时人们对极其聪明的匈牙利科学家的昵称）就已经发现了一个惊天秘密：积分方程可以连接分立的矩阵和连续的函数。

- **高三数学小贴士：** 你们学过微积分吗？积分其实就是求和的极限。
  - 矩阵乘法是 $\sum a_{ik}b_{kj}$（离散求和）。
  - 积分是 $\int A(x,y)B(y,z)dy$（连续求和）。
    兰佐施敏锐地发现，矩阵就是"像素化"的积分核，而积分核就是"连续化"的矩阵。他最早搭建了这座桥梁，但因为他用的数学工具（积分方程）当时太冷门，大家都没怎么理他。直到后来，大家才发现他是对的。

2. 兰佐施的量子力学与等价性问题

2.1 原文完整译文

1 兰佐施的量子力学与等价性问题

兰佐施是匈牙利人，数学家、物理学家，被誉为"火星人"。1921年，兰佐施以相对论研究在匈牙利获得博士学位，他把学位论文作为致敬爱因斯坦之作，爱因斯坦欣然接受，并称赞其含有充分的、原创的脑力劳动。兰佐施1921—1924年间在德国弗莱堡大学任教，1924—1931年间在德国法兰克福大学任教，1928—1929年间在柏林大学做过爱因斯坦的助手。后来，兰佐施移居美国，1931—1946年间在普渡大学任教。兰佐施是一个对经典力学格外通透的人，故而对相对论和量子力学都有卓越的贡献，前

者是指他第一个给出了柱对称下的爱因斯坦场方程的解，后者是指他第一个构造了积分方程形式的量子力学。

在玻恩—约当发表了矩阵力学之后仅仅三个月，兰佐施就在1925年底构造了积分方程版的量子力学。这篇文章的收稿日期为1925年12月22日，在薛定谔的波力学论文之前。这篇文章构造了新量子力学的连续形式，证明了矩阵版与连续形式的量子力学的等价性。可惜的是，兰佐施用的是线性积分方程的形式，这当然不是缺乏数学物理功底的普通物理教授能接受的，故而兰佐施的量子力学鲜为人知。所幸，当时还有狄拉克这样的博士生（1926年狄拉克才拿到博士学位）能读懂兰佐施的论文，Wikipedia "The principle of quantum mechanics"词条云："狄拉克从一篇兰佐施的用线性积分方程理论表示量子力学的论文中得到了启发"。兰佐施上世纪30年代在普渡大学教授矩阵力学和张量分析，算是世界上不多的教授矩阵力学的实践。

[内容摘录]

海森堡—玻恩—约当的新量子力学理论与积分方程有密切的关系。运动方程和量子条件可以用积分方程的形式写下来。可以得出一个与非连续表述等效的连续表述，因为两者之间存在唯一的对应。就理论的原理性诠释而言（für die principielle Deutung der Theorie）积分表述更优，其与物理学的场表示形式直接相契合。

§1 导言

海森堡的影响深远的思考过程对量子研究具有划时代的意义。在接下来的对新思想的拓展中，玻恩和约当成功地将海森堡的理念在更广泛的意义上赋予了恰当的数学表达，并为新理论提供了一般性的形式基础——这才是科学研究的高境界。由此得到了一个逻辑地构造的非连续理论，对此经典概念只有与之相对应的以及作为启发式路标的意义。新理论从一开始就是走自己的路，其与旧符号在崭新的意义上相联系（mit den alten Symbolen einen vollständig neuen Sinn verknüpft）。知道这一点对我们学习量子力学很重要。量子论的原理性基础由此得到了难以想象的深化。

在海森堡—玻恩—约当理论和积分方程理论之间可以建立起格外简单、漂亮的联系。我们会看到，所有的新理论的结果可以用积分方程的形式表示，而对于习惯于用分析工具工作的物理学家来说后者比矩阵表述更显亲近。同时我们还会建立起一个连续的表述，那是描述事实所关切的，其与非连续表述之间有唯一的对应。但是，就对事实的诠释而言，这是量子的实质所关切的，不排除积分表述超越矩阵表述。前者具有同场表述直接相契合——干脆就是建立于其上——的优点，而场的概念明显与非连续表述有些距离。

设想有一个任意大小、任意维度的有限闭合区域，我们将此区域中的任何一点的所有坐标简短地用一个字母，比如"s"表示。在这个区域中，存在一个完备正交本征函数集 $\varphi^i(s)$，其属于一个非简并的对称的（积分）核 $K(s,\sigma)=K(\sigma,s)$。$f(s,\sigma)$ 是一个依赖于两个点 s,σ 的至少是分段连续的函数，具有所谓核函数的特征。我们考察这个函数对 s 的依赖关系，为此保持 σ 不变，可以根据本征函数 $\varphi^i(s)$ 展开，所得的展开系数仍依赖于 σ，展开式为：

$$f(s,\sigma)=\sum a_i(\sigma)\varphi^i(s) \quad \text{(A1)}$$

将 $a_i(\sigma)$ 也按照本征函数展开：

$$a_i(\sigma) = \sum a_{ik}\varphi^k(\sigma) \quad (\mathrm{A2})$$

这样就得到了如下的函数表示：

$$f(s,\sigma) = \sum a_{ik}\varphi^i(s)\varphi^k(\sigma) \quad (\mathrm{A3})$$

其中的每一个 a_{ik} 都可由在这个区域上的二重积分得到：

$$a_{ik} = \int f(s,\sigma)\varphi^i(s)\varphi^k(\sigma)dsd\sigma \quad (\mathrm{A4})$$

可以把 a_{ik} 写成无穷矩阵的形式。矩阵可以看作是函数 $f(s,\sigma)$ 的完全表示，因为给定了矩阵 a_{ik}，函数 $f(s,\sigma)$ 可以在公式(A3)的意义上构建出来。另一方面，函数 $f(s,\sigma)$ 也可以看作是矩阵的表示，因为通过在公式(A4)意义上的积分可以直接计算出矩阵元 a_{ik}。

2.2 专家视角的背景补充与深度解析

兰佐施的工作是量子力学数学结构中的一块"隐藏的宝石"。

1. **积分方程作为核心连接**：
   兰佐施的核心洞见在于将希尔伯特空间中的线性算符表示为积分核（integral kernel）。在现代泛函分析语言中，算符 $\hat{A}$ 作用于函数 $\psi(x)$ 可以写成 $\hat{A}\psi(x) = \int K(x,y)\psi(y)dy$。兰佐施指出，矩阵元 a_{ik} 实际上是这个积分核 $K(x,y)$ 在正交基底 $\varphi^i(x)$ 下的展开系数[1]。这种视角将分立的矩阵索引 (i,k) 转化为连续的坐标变量 (s,σ)，从而在该领域首次建立了离散与连续之间的同构关系。
2. **对狄拉克的影响**：
   狄拉克在1926年的博士论文及后续工作中发展了变换理论（Transformation Theory），这是现代量子力学的标准语言。文献明确指出，狄拉克受到了兰佐施积分方程方法的启发[3]。狄拉克后来引入的 δ 函数，在兰佐施的论文中已经以"单位核"（Unit Kernel）的形式出现，尽管当时还缺乏分布理论（Theory of Distributions）的严格支持[4]。
3. **为何被忽视?**
   尽管兰佐施的方法在数学上更为优雅且更接近场论直觉，但在当时，物理学界普遍缺乏处理积分方程的训练。相比之下，薛定谔的微分方程（波力学）可以利用物理学家熟悉的经典波动方程解法（如分离变量法）来处理，因此迅速占据了主导地位[2]。此外，海森堡和玻恩的矩阵力学虽然抽象，但得到了哥廷根数学学派（如希尔伯特）的强力背书。兰佐施作为一名相对边缘的学者，其深刻的数学洞察未能在当时引起足够的共鸣。

2.3 面向高三学生的嵌套学习：把"像素点"变成"风景画"

谁是兰佐施？为什么说他是"火星人"?

在20世纪初，匈牙利走出了一批智商绝顶的科学家，包括冯·诺伊曼、西拉德、特勒等。他们因为思维太超前、太聪明，被美国同事戏称为"火星人"（Martians）。兰佐施就是其中一位，他虽然名气没有爱因斯坦大，但他对数学物理的直觉极其敏锐，甚至做过爱因斯坦的数学助手。

兰佐施到底干了什么?

你们玩过《我的世界》(Minecraft)吗?或者看过那种低分辨率的像素图吗?

- **矩阵力学(海森堡/玻恩):** 就像是用一个个小方块(像素)堆出来的世界。每一个 a_{ik} 就像是一个方块的坐标和颜色。这是一个**离散**的世界,只有第1块、第2块,没有第1.5块。
- **积分力学(兰佐施):** 兰佐施说,如果我们站得足够远,这些方块就连成了一片平滑的风景。他把离散的矩阵下标 i 和 k 变成了连续的坐标 s 和 σ。

他是怎么做到的?(数学魔法揭秘)

1. **公式 A1-A3:这其实是"向量分解"的升级版。**
   - 在高三立体几何或物理中,你们知道一个力 $\vec{F}$ 可以分解到 x轴、y轴、z轴上:$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$。
   - 兰佐施说,一个复杂的连续函数 $f(s, \sigma)$ 也可以看作是一个"超级向量"。它的"坐标轴"不是 x, y, z,而是无数个基础函数 $\varphi^i(s)$。
   - 那个神秘的系数 a_{ik},就是这个函数在不同"方向"上的投影大小。
2. **公式 A4:这是"点乘"的连续版。**
   - 向量点乘是 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$(对应位置相乘再相加)。
   - 函数的"点乘"就是积分:$\int f(x)g(x)dx$(对应位置的值相乘,然后累加起来)。
   - 兰佐施通过积分,把连续的函数 $f(s, \sigma)$ "切"成了无数个小块,每一块的大小就是矩阵元 a_{ik}。

核心洞察:

兰佐施发现,矩阵只是连续函数的一种"编码方式"。

- 给你一个矩阵,你可以通过公式 (A3) 画出一个连续函数。
- 给你一个连续函数,你可以通过公式 (A4) 算出一个矩阵。

这就是等价性的最早证明!他告诉物理学界:别吵了,离散和连续其实是一回事,只是看待世界的"分辨率"不同而已。

3. 矩阵运算的"变身":从求和到积分

3.1 原文完整译文

§2 对应场积分的矩阵操作

在矩阵的非连续图像与至少一般来说是连续的函数 $f(s, \sigma)$ 之间存在一个唯一确定的对应。进一步地,可以为对理论有意义的全部矩阵操作安排相应的针对函数的操作。

(a) 矩阵的对角元之和。 构造如下的积分：

$$\int f(s,s)ds = \sum a_{ik} \int \varphi^k(s)\varphi^i(s)ds = \sum a_{ii} \quad (\text{A5})$$

可见全域上的场积分

$$\int f(s,s)ds \quad (\text{A6})$$

对应对角元之和（即矩阵的迹，Trace）。

(b) 矩阵积。 由函数 $f(s,\sigma)$ 和 $g(s,\sigma)$ 通过积分构造如下函数：

$$h(s,\sigma) = \int f(s,\tau)g(\tau,\sigma)d\tau \quad (\text{A7})$$

此为两个函数的**场积** (Feldprodukt)，可简记为

$$h(s,\sigma) = fg(s,\sigma) \quad (\text{A8})$$

也就是

$$h(s,\sigma) = \sum a_{ik}b_m\varphi^i(s)\varphi^n(\sigma) \int \varphi^k(\tau)\varphi^m(\tau)d\tau = \sum a_{im}b_n\varphi^i(s)\varphi^n(\sigma) \quad (\text{A9})$$

对应矩阵乘法：

$$c_{in} = \sum_m a_{im}b_{mn} \quad (\text{A10})$$

(c) 符号微分。 任意多个因子的场积简记为

$$P(s,\sigma) = (pqr\cdots uv)(s,\sigma) \quad (\text{A11})$$

构造积分：

$$\int P(s,s)ds = \int p(s,\alpha)q(\alpha,\beta)\cdots u(\lambda,\mu)v(\mu,s)dsd\alpha d\beta\cdots d\lambda d\mu \quad (\text{A12})$$

这个式子是循环的，可以记为

$$\int (pqrt\cdots uv)(s,s)ds = \int (rt\cdots uvpq)(s,s)ds \quad (\text{A13})$$

现在构造积分(A11)的变分，改变其中的一个函数，比如 r，

$$\delta \int P(s,s)ds = \int \delta r(s,\tau)(t\cdots uvpq)(\tau,s)ds \quad (\text{A14})$$

另一方面，我们想将变化所引起的积分的变分写成如下形式：

$$\delta\int P(s,s)ds=\int(\delta r\frac{\partial P}{\partial r})(s,s)ds \quad (\text{A15})$$

与(A14)式比较，得：

$$\frac{\partial P}{\partial r}(s,\sigma)=(t\cdots uvpq)(s,\sigma) \quad (\text{A16})$$

若多个因子相等，则（做变分时）我们要对每一个单独的因子构造对应的积，并求和。

比较这里的微商构造与玻恩—约当论文 {M. Born, P. Jordan, Zur Quantenmechanik (走向量子力学), Zeitschrift für Physik, 34, 858-888(1925)} 中相应的矩阵的规则，可以直接看到两者完全吻合。

(d) 对时间的导数。 表征动力学的矩阵 p,q 在玻恩—约当那里是当作时间函数处理的，每一个矩阵元都包含一个因子 $e^{2\pi i\nu_{ik}t}$ {绝大部分量子力学书籍都不知道这一点，因为玻恩—约当那里为了简记把这项省略了。各位读者如果不信，可以拿出手边的量子力学书比对一下。补充一句，因为这个因子来自傅里叶分析，矩阵元的指标须从(00)开始!}。对于接下来的非连续理论，引入一个连续变换的参数以及连续依赖于这个参数的函数显然不是有意的。实际上在后来的理论构造中没用到这个时间依赖，引入这个时间依赖只有一个目的，即为了能将哈密顿运动方程的左侧诠释为时间导数。实在来说，这个运动方程根本不是关于字面意义上的任何运动的（*In Wirklichkeit handelt es sich aber bei diesen "Bewegungsgleichungen" gar nicht um irgend eine "Bewegung" in dem Sinne des Wortes...*）——即将某个量确定为时间的函数 它更多地是表达两个其元素仅仅是数的矩阵的支配方程（*Bestimmungsgleichung*）。从一开始用"时间"一词，以及看起来很合逻辑地根据定义安排"时间导数"，可不是故意的。取代"时间导数"的说法，我们宁愿说"点导数"，因为我们将用上面加点来表示。当我们给矩阵元 a_{ik} 乘 $\pm v_{ik}$，v_{ik} 是量子论的频率，就得到了"加点的矩阵"。在玻恩—约当那里还有一个 $2\pi i$ 因子，因此会有让人不舒服的、多余的虚的量，看不出有什么内在必要性（*innere Notwendigkeit*） {这个观点可错到家啦。为了丢掉这个因子，我们定义"加点"为对 $2\pi it$ 而非对 t 的导数。}

现在，v_{ik} 表示两项之差：

$$v_{ik}=\frac{W_i-W_k}{h} \quad (\text{A17})$$

"加点的矩阵"可分解成两个矩阵之差：第一个的每一行乘上 $\frac{W_i}{h}$ 第二个的每一列乘 $\pm\frac{W_k}{h}$。这个操作在泛函表示那里对应什么?

由函数 $f(s,\sigma)$ 和属于本征函数 $\phi^i(s)$ 的对称核函数 $K(s,\sigma)$ 构造如下的积：

$$\int f(s,\tau)K(\tau,\sigma)d\tau=\sum a_{ik}\varphi^i(s)\int\varphi^k(\tau)K(\tau,\sigma)d\tau=\sum\frac{a_{ik}}{\lambda_k}\varphi^i(s)\varphi^k(\sigma) \quad (\text{A18})$$

将顺序颠倒，如下的结果成立：

$$\int K(s,\tau)f(\tau,\sigma)d\tau=\sum\frac{a_{ik}}{\lambda_i}\varphi^i(s)\varphi^k(\sigma) \quad (\text{A19})$$

可见函数"加点"简单地意味着如下操作：

$$\dot{f}(\tau,\sigma)=(Kf-fK)(s,\sigma)\quad(\mathrm{A20})$$

"加点"又回归同对称核函数 $K(s,\sigma)$ 之间的乘积。由此直接得到本征值 λ_i 同能级 W_j 间的关系：

$$\frac{1}{\lambda_i}=\frac{W_i}{h}\quad(\mathrm{A21})$$

即能级 W_j 除以脱壳而出（sich entpuppen）对称核函数 $K(s,\sigma)$ 的本征值之倒数。在为所有的基本矩阵操作找到了对应的积分表示的操作——每次都是执行一个场积分——以后，我们可以着手建立动力学基本方程了。

§3 积分方程作为动力学基本方程

因为矩阵形式的运动方程是从变分原理推导出来，这对于确定相应的函数 $p(s,\sigma)$ 和 $q(s,\sigma)$ 也成立。设想有一哈密顿函数：

$$H(p,q)(s,\sigma)\quad(\mathrm{A22})$$

写出如下的函数：

$$p\dot{q}(s,\sigma)-H(p,q)(s,\sigma)\quad(\mathrm{A23})$$

或者在方程(A2)的意义下写成：

$$(pKq-pqK)(s,\sigma)-H(p,q)(s,\sigma)\quad(\mathrm{A24})$$

构造如下的场积分：

$$I=\int(pKq-pqK-H(p,q))(s,s)ds\quad(\mathrm{A25})$$

期望此积分随函数 $p(s,\sigma)$ 和 $q(s,\sigma)$ 的自由变分会达到极值，即对于每一个 $\delta p,\delta q$ 有：

$$\delta I=0\quad(\mathrm{A26})$$

先对 p 变分，

$$\delta I=\int\delta p(s,\tau)(Kq-qK-\frac{\partial H}{\partial p})(\tau,s)ds\quad(\mathrm{A27})$$

再看对 q 的变分，为此要在前两项进行循环交换，得：

$$\delta I=\int\delta q(s,\tau)(pK-Kp-\frac{\partial H}{\partial q})(\tau,s)ds\quad(\mathrm{A28})$$

若对于任意的 p,q 为0，则积分符号里的因子应恒为0，可得到确定函数 $p(s,\sigma)$ 和 $q(s,\sigma)$ 的方程为如下的积分方程：

$$(Kq-qK)(s,\sigma)=\frac{\partial H}{\partial p}(s,\sigma),\quad (Kp-pK)(s,\sigma)=-\frac{\partial H}{\partial q}(s,\sigma)\quad \text{(A29)}$$

§4 量子条件

新理论的实质性构成部分，除了动力学基本方程外，还有量子条件，根据玻恩—约当此条件为 $pq-qp=\frac{h}{2\pi i}I$。为了表示成积分形式，只需要为单位矩阵1找到对应的函数 $E(s,\sigma)$，

$$E(s,\sigma)=\sum\varphi^i(s)\varphi^k(\sigma)\quad \text{(A30)}$$

此被称为单位核。

玻恩—约当量子化条件对应如下的积分方程：

$$(pq-qp)(s,\sigma)=hE(s,\sigma)\quad \text{(A31)}$$

因子 $2\pi i$ 因为此前我们关于"加点"函数的定义去掉了。

单位核有如下值得关注的行为。对于 $s\neq\sigma$，其为0；而在点 $s=\sigma$ 上为无穷大 {这个函数后来被称为狄拉克 δ-函数，是理解量子力学的关键}，且有：

$$\lim_{\epsilon=0}\int E(s,s+\epsilon)ds=1\quad \text{(A32)}$$

对于函数 $(pq-qp)$ 有：

$$(pq-qp)(s,\sigma)=\begin{cases}0, & s\neq\sigma\\ \infty, & s=\sigma\end{cases}\quad \text{(A33)}$$

我们看到函数 p,q 不能在整个区域内到处都是有限的，否则积 pq,qp 就到处是有限的。如果函数 $p(s,\sigma),q(s,\sigma)$ 到处都是有限的，则玻恩—约当量子条件就不能完全精准地而只能是任意近似地成立（nicht mit voller Schärfe, sondern nur mit beliebiger Annäherung gültig sein）。

3.2 专家视角的背景补充与深度解析

本节内容触及了算符代数的数学核心，揭示了矩阵乘法与积分变换的深层联系。

1. **卷积与算符乘法**：
   兰佐施定义的"场积"（公式 A7）在数学上正是核函数的合成（composition of kernels），这等同于线性算符的乘积。对于两个算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$，其积 $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$ 对应的核函数 $K_C(x,z)$ 正是 $\int K_A(x,y)K_B(y,z)dy$[16]。兰佐施敏锐地指出，矩阵乘法的求和 $\sum_k a_{ik}b_{kj}$ 只是这种积分合成在离散基下的表现形式。
2. **单位核与狄拉克 δ 函数的先声**：
   兰佐施引入的单位核 $E(s,\sigma)$（公式 A30-A33）是历史上对广义函数（Distribution）最早的物理应用之一。在狄拉克正式提出 δ 函数之前，兰佐施已经明确描述了它的性质：在一点无穷大，其

余为零，积分为1[4]。这不仅是数学上的创新，更是物理上理解"位置本征态"的关键——即位置精确确定的状态在空间中是一个无限尖锐的峰。

3. **对易关系的本质与奇异性**：
   公式 (A31) $pq - qp = hE$ 揭示了海森堡不确定性原理的数学根源。由于 $E(s, \sigma)$ 的奇异性（在对角线上发散），这意味着 p 和 q 不能同时是普通的有界函数。这预示了后来Wintner在1947年证明的定理：满足正则对易关系的算符不能都是有界算符（Unboundedness of Quantum-Mechanical Matrices）[7]。兰佐施在1926年就已经通过积分方程的奇异性预见到了这一点，这体现了他非凡的物理直觉。

3.3 面向高三学生的嵌套学习：翻译"矩阵语言"到"函数语言"

这一段是"翻译"工作的核心：怎么把矩阵语言翻译成函数语言。

1. **迹（Trace）vs 积分：**
   - 在矩阵里，对角线元素相加叫"迹"。比如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的迹是 $1 + 4 = 5$。
   - 兰佐施说：在连续世界里，这就是算 $\int f(s, s) ds$。注意这里两个变量都是 s，意味着我们在看函数 $f(x, y)$ 在 $x = y$ 这条对角线上的值，然后把它们加起来。这简直是神来之笔，直观地对应了矩阵的"对角线"。
2. **矩阵乘法 vs "多米诺骨牌"积分：**
   - 矩阵乘法是"行乘列"。$C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$。中间那个下标 j 被"吃掉"了（求和了）。
   - 兰佐施的公式 (A7) $h(s, \sigma) = \int f(s, \tau) g(\tau, \sigma) d\tau$ 做的是完全一样的事！中间变量 τ 被积分积掉了，就像"多米诺骨牌"的传递一样：s 连到 τ，τ 连到 σ，最后得到了从 s 到 σ 的关系。
   - **高能预警：** 这个积分形式实际上就是数学上著名的**卷积**（Convolution）或者是**积分算子**的乘法。在量子力学里，这就是算符作用在波函数上的本质。
3. **量子力学的核心——顺序很重要（非对易性）：**
   - 你们知道 $3 \times 4 = 4 \times 3$，普通的乘法是可以交换顺序的。
   - 但是矩阵乘法不行！$A \times B$ 通常不等于 $B \times A$。
   - 兰佐施的积分公式也一样，先积 f 再积 g，和先积 g 再积 f，结果是不一样的。
   - 正是这种**"顺序很重要"**的特性，造就了量子力学的奇妙世界（比如不确定性原理）。公式 (A31) $pq - qp = hE$ 就是在说：位置和动量这两个物理量，它们的顺序差异正好等于一个常数（普朗克常数）。这就意味着你不能同时精确测量它们！
4. **奇怪的"单位核"：**
   - 公式 (A31) 里出现了一个 $E(s, \sigma)$。兰佐施描述它：在 $s \neq \sigma$ 时是 0，在 $s = \sigma$ 时是无穷大，而且积分等于 1。
   - **这不就是狄拉克 δ 函数吗？** 对！当时狄拉克还没正式定义它，兰佐施就已经在用了。这个函数像一根无限细、无限高的针，它是连续世界里的"单位1"。

4. 薛定谔的"论关系"：从对抗到统一

4.1 原文完整译文

2 薛定谔的等价性证明

薛定谔的"论关系"一文我倒是宁愿解读为对波力学算子代数的使用说明。在正经大学的正经物理系正经地学习过量子力学的人大部分都知道 $p_x = -i\hbar\partial_x$，但是能在方程 $[H(q, -ih\frac{\partial}{\partial q}) - E]\psi = 0$ 中把它用对了也不是那么容易。薛定谔"论关系"一文中的大部分内容是一般的量子力学教科书不提的；至于玻恩—约当，玻恩—海森堡—约当，狄拉克，泡利的四篇矩阵力学经典论文的内容（参见本系列的"矩阵力学"一篇），一般量子力学教科书更是懒得提及。

薛定谔的"论关系"一文是他的波理论的重要组成部分。

[内容摘录]

§1 引言与摘要

就海森堡 {薛定谔此处有脚注，此为对玻恩—海森堡—约当的简记} 的量子力学与波力学或曰物理力学（undulatorische oder physikalische Mechanik）在出发点与表述范围的巨大差别来看，它们至今已知的结果就同老量子论的偏离而言是一致的，这确属罕见。一个特别的例子是（得出）振子和转子问题里的半整数量子数。容易注意到两种力学在出发点、表示（方式）、方法以及全部的数学工具都那么不同，它们同经典力学的偏离也是南辕北辙。在海森堡那里，经典力学变量被分立的数字体系（矩阵）所取代，该矩阵用整数指标标记，由代数方程确定。该理论的作者们说那是真正的非连续理论（wahre Diskontinuumstheorie）。波力学则从经典力学往连续理论方向又迈出去一步。用有限多独立变量通过有限多全微分方程可描述的事件被一个在构型空间上的连续的、类场的事件（kontinuierliches feldmäßiges Geschehen）所取代，其可由一个由作用量原理导出的偏微分方程所支配。这个作用量原理和偏微分方程替代老经典量子论（ältere klassische Quantentheorie）里的运动方程和量子条件。在这里，薛定谔加了一个惹出故事的注："我的理论受德布罗意的学位论文和爱因斯坦的简短但有无限深意的论文 (Berl. Ber. 1925, S. 9ff.) 的启发。同海森堡理论的出身上的联系我根本无感。我当然懂他的理论，但它的在我看来很困难的超越代数方法以及缺乏直观性（Mangel an Anschaulichkeit）让我感到丧气，如果不是排斥"。海森堡估计读到了这句话。他在6月8日给泡利的明信片上写道：薛定谔所说的Anschaulichkeit就是屎（Mist）。

接下来是对海森堡量子力学和波力学之间的非常亲密的内在联系（*der sehr intime innere Zusammenhang*）的发现之旅。从形式数学的观点来看，可以说这个关系可视作等同（*als Identität zu bezeichnen*）。

海森堡的理论将量子问题的解系于求解一个无穷代数方程组，其变量，即无穷维矩阵，会被赋予力学系统的经典坐标、动量及它们的函数，遵从独有的运算法则（*eigenartige Rechengesetze befolgen*）。先看看如何赋予（*Zuordnen*, 分派）每一个坐标、动量的函数一个矩阵，使其总是遵从玻恩—海森堡的形式运算法则（包括量子条件和交换规则）。这个为函数赋予矩阵的操作是一般性的，与具体的力学系统无关。这个分派又是高度不确定的，其借助于任意的、定义在整个构型空间上的完备正交函数集。

求解表征特定问题的特定代数方程组——其将位置和动量的矩阵同哈密顿函数的矩阵相联系，作者们称为运动方程——只需将中介的角色赋予指定的正交系，也即构成我的波力学之基础的偏微分方程的本征函数，即可完全做到。这个微分方程的自然边界问题的解与海森堡的代数问题的解完全等价。所有海森堡的矩阵元，据信其可以确立跃迁概率或谱线强度，只要边界问题可解，确实可以通过微分和二次型算出来。这些矩阵元，在波力学里有一个完全直观的意义，即原子的电偶极矩的分振动振幅。发射光的强度与偏振可在麦克斯韦—洛伦兹理论的基础上加以理解。

§2 给良序函数符号分派算符与矩阵，建立乘法规则

构造矩阵的出发点为，关于两组个量 $q_1, q_2, ...q_n; p_1, p_2, ...p_n$ 的函数的海森堡运算规则，根据常规的数学分析，适用于在单一一组变量 $q_1, q_2, ...q_n$ 上的线性微分算符。在函数中将每一个 p 用算符 $\partial/\partial q_l$ 替代。对于任何 $m \neq l$，$\partial/\partial q_l$ 与 q_m 是对易的。对于任何 $m = l$，对易式

$$\frac{\partial}{\partial q_i} q_i - q_i \frac{\partial}{\partial q_i} \quad \text{(B1)}$$

作用到的任意函数上重现该函数，也即该算符为恒等算符。

现在开始系统的构造。因为前述的"非总是可对易性（Nichtimmervertauschbarkeit）"，一个给定的算符不是唯一地对应通常意义上的一个 q_k, p_k 的函数，而是以明确的方式写下的函数符号（Funktionssymbol）。此外，因为对算符 $\partial/\partial q_k$ 我们只有加法和乘法，因此 q_k, p_k 的函数至少可写成 p_k 的规则幂级数，这样才可以用算符 $\partial/\partial q_k$ 替代 p_k。只需考虑幂级数中的一项，即对如下构造的函数：

$$F(q_k, p_k) = f(q_1, \cdots q_n) p_r p_s p_t \times g(q_1, \cdots q_n) p_{r'} h(q_1, \cdots q_n) p_{r''} p_{s''} \cdots \quad \text{(B2)}$$

我们将之当作**良序的函数符号**（*Wohlgeordnete Funktionssymbole*），并分派如下的算符：

$$[F, *] = f(q_1, \cdots q_n) K^3 \frac{\partial^3}{\partial q_r \partial q_s \partial q_t} g(q_1, \cdots q_n) \times K \frac{\partial}{\partial q_r} h(q_1, \cdots q_n) K^2 \frac{\partial^2}{\partial q_{r'} \cdot \partial q_{s'}} \cdots \quad \text{(B3)}$$

这意思是用算符 $K\partial/\partial q_r$ 替代 p_r，K 应是个普适常数。将自良序函数 F 而来的算符简记为 $[F, *]$，$[F, u]$ 是将该算符作用到通常意义上的函数 $u(q_1, ...q_n)$ 上所得的通常意义上的函数。

现在为一个良序函数 F，通过其相应的算符(B3)以及任意一个定义在整个 q-空间上的完备正交集，分派一个矩阵。将坐标 $q_1, ...q_n$ 简记为 x。函数 $u_1(x)\sqrt{\rho(x)}, u_2(x)\sqrt{\rho(x)}$ 是一个完备的、归一的正交集。函数 F 通过算符(B3)可被分派矩阵：

$$F^{kl} = \int \rho(x) u_k(x) [F, u_l(x)] dx \quad \text{(B6)}$$

不难证明，良序函数及其对应的算符的加与乘会造成所属矩阵的矩阵和与矩阵积。

§3 海森堡量子条件与偏微分规则

因为(B1)式中的操作是恒等，故对应良序函数 $p_l q_l - q_l p_l$，根据分派规律，所得算符还应乘上普适常数 K。对应(B10)的矩阵为 $(p_l q_l - q_l p_l)^{ik} = K\delta_{ik}$。令

$$K = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}} \quad \text{(B12)}$$

这就是海森堡量子关系 {式(B12)的右侧，薛定谔早在1922年就写下了。注意，$\sqrt{-1}$ 的意思是同时等于 $\pm i$。参阅拙著《云端脚下》}。

§4 海森堡运动方程的解

我{薛定谔}断言：

(1) 若如下偏微分方程

$$-[H, \psi] + E\psi = 0 \quad \text{(B21)}$$

的自然边界问题的本征函数被选作正交集，其中 ψ 是 $q_1, q_2, ...q_n$ 的函数，E 是本征值参数，海森堡的运动方程可得到满足。量 ν_{ik} 就是本征值 E_i 与 E_k 之差除以 h，H^{ik} 是对角矩阵，$H^{kk} = E_k$。

(2) 若函数 H 的对称化已以恰当的方式实现了——我的观点是，对称化过程当前未被唯一地定义——则(B21)式与作为波力学之基础的波方程同。

这样，整个的海森堡—玻恩—约当的矩阵方程就归结为一个线性偏微分方程的边界值问题。求解了这个边界值问题，就可以根据(B6)式通过微分与二次型构造（*Quadraturen*）计算每一个感兴趣的矩阵元。

§5 两种理论的比较。对辐射之强度与偏振的经典理解的预期

从纯数学的角度看它们是完全等价的。但是，作为为某一个理论的自然辩护，我会坦然地说出偏爱它的理由。

问题是由实验物理以格外直观的形式提出的。微观力学是对宏观力学的细化，这完全是从几何光学到物理光学那样的过渡。一个特别重要的问题是原子动力学现象与电磁场之间的耦合问题。原子动力学的矩阵表示惹人猜测，实际上电磁场必须用另一种方式，也即用矩阵形式表述。波力学表明容易做到这一点。

考虑波理论下的氢原子图像，计算空间密度，可得 q_l 方向的偶极矩分量：

$$M_{q_l} = 2\pi \sum_{k,m} c_k c_m q_l^{km} \frac{E_k - E_m}{h} \sin \frac{2\pi t}{h}(E_k - E_m) \quad \text{(B38)}$$

这事实上是原子电极矩的傅里叶展开，其中"项之差"作为频率出现。在系数中出现海森堡的矩阵元 q_l^{km}，其对辐射的强度与偏振的影响在经典电动力学的基础上是完全可以理解的。

4.2 专家视角的背景补充与深度解析

薛定谔的这篇论文是量子力学统一进程中的关键节点，但也暴露了当时物理学界深刻的哲学分歧。

1. **"良序函数"与算符排序**：
   薛定谔引入"良序函数"（well-ordered function）的概念是为了处理经典量过渡到量子算符时的次序歧义（Ordering Ambiguity）。在经典力学中 $qp = pq$，但在量子力学中它们不对易。薛定谔试图通过一种特定的排序规则（如将所有 p 置于 q 之后或对称化）来建立对应关系[12]。这触及了量子化过程中的核心难题，后来魏尔（Weyl）、冯·诺伊曼等人都对此进行了更深入的数学探讨（如Weyl quantization）。
2. **"Anschaulichkeit"之争（直观性 vs 抽象性）**：
   文中薛定谔对矩阵力学缺乏"直观性"（Anschaulichkeit）的批评，以及海森堡的反击（称波力学为"Mist"/狗屎），反映了当时物理学界的认识论冲突[21]。薛定谔试图恢复经典的时空连续图像，认为电子是真实的波；而海森堡坚持操作主义（Operationalism），认为只有可观测量（光谱频率、强度）才是真实的。这一争论贯穿了哥本哈根诠释的形成过程，并最终导致了海森堡在1927年提出不确定性原理，试图在矩阵力学内部阐明"直观性"的物理含义[5]。
3. **等价性证明的局限性**：
   薛定谔虽然证明了波算符可以映射为矩阵，但他没有严格证明逆命题——即任意矩阵都能找到对应的波算符[1]。特别是对于无界算符（如位置和动量），简单的矩阵乘法规则在无限维情况下可能失效。薛定谔的证明建立在物理直觉之上，直到后来冯·诺伊曼引入了希尔伯特空间同构（Isomorphism）的概念，才从数学上彻底解决了这一问题[9]。

4.3 面向高三学生的嵌套学习：薛定谔的大招——用算符"变"出矩阵

薛定谔的困惑：

薛定谔当时肯定很郁闷。他刚发明了波动力学，觉得自己用连续的波解释了世界，很完美。结果海森堡那帮人搞的矩阵力学虽然长得丑（全是数字，没有图），但算的答案竟然和他一样。他想："难道我算错了？还是说这两个东西其实是一个东西？"

核心破解法——算符（Operator）：

薛定谔发现了一个惊人的秘密：海森堡矩阵里的那个神秘的 p（动量），其实就是微分算符！

- **海森堡说：** p 是一个矩阵，一堆数。
- **薛定谔说：** 不，p 是一个动作，叫做"求导"。具体来说，

$$p = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$$

- 如果你把这个"求导"的动作作用在一个波函数上，再进行积分（公式 B6），你就能算出海森堡矩阵里的每一个数字！

良序函数（Well-ordered function）的坑：

这里有个细节很有趣。在经典力学里，$x \cdot p$ 和 $p \cdot x$ 是一样的（位置乘以动量 = 动量乘以位置）。但在量子力学里，一个是"先乘以 x 再求导"，另一个是"先求导再乘以 x"，结果完全不同！

薛定谔意识到，要把经典公式变成量子公式，必须小心排列 x 和 p 的顺序。这就是文中提到的"良序函数"。这就像做菜，先放盐还是后放盐，味道可能完全不一样。

为什么薛定谔"偏爱"波力学？（直观性之争）

- **Anschaulichkeit** 是德语，意思是"直观性"或"可图像化"。
- 薛定谔在文章最后说：虽然数学上等价，但我更喜欢我的波力学。因为波力学能让你**看到**电子像云一样分布，能让你用经典的电磁波理论去理解原子发光。它让物理学回归了人们熟悉的图像。
- 而海森堡的矩阵力学，只有冷冰冰的数字跃迁，没有轨迹，没有形状，这让薛定谔感到"厌恶"。
- 有趣的是，海森堡也不甘示弱，回击说波力学的"直观性"是误导人的"垃圾"（Scheiße）。这场关于"直观性"的辩论，是量子力学历史上最著名的吵架之一。最后的结果是：海森堡被迫搞出了"不确定性原理"来解释为什么我们看不清电子的轨迹。

5. 总结与展望：殊途同归的数学之美

5.1 原文与补充说明

补充部分与结语

对于薛定谔的上述两种量子力学的等价性证明，有必要作一些补充说明。矩阵力学的问题是解矩阵版的运动方程 $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}, \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}$，而其中 H 是对角化的。波力学的问题是解微分方程 $H(q, -i\hbar\partial_q)\psi = E\psi$，本征值 E_n 是量子能级。薛定谔觉得经验等价性可通过证明数学等价性来解释，但薛定谔未能证明数学等价性。薛定谔证明了只有一个波力学算符可以映射到一个矩阵力学的矩阵，但没证明对任意矩阵力学的矩阵总存在一个波力学算符。薛定谔文中提及的用不同阶矩（Gesamtheit der Momente）表示函数的问题一般来说不可解。每一个波力学算符可以联系一个矩阵力学的矩阵，但薛定谔没指出对应波力学算符的矩阵力学的矩阵应是Wintner矩阵，即行和列是平方和有限的。矩阵力学里的矩阵事先没有这个要求。

薛定谔证明的是波力学算符同矩阵力学的矩阵之间的等价性，但没有波函数/状态的等价性，因为矩阵力学（那时）没有状态空间的说法。波力学算符作用到任意函数上的结果无法从一个矩阵计算得到。狄拉克在1926年的变换理论中第一个指出"状态"和"可观测量"的区别。在波力学中这是有的，即波函数与算符。狄拉克指出，矩阵力学里矩阵 H 的本征矢量，也即 H 的变换矩阵的元素，即是波方程里的本征函数。

薛定谔本人内心到底是怎么看待波力学与矩阵力学的?

在 Helmut Rechenberg 所著 Werner Heisenberg: Die Sprache der Atome, Springer (2010) (维纳海森堡：原子的语言) 一书第485页上提及薛定谔1926年2月22日致维恩的信，其中说到他（薛定谔）希望"矩阵计算在通过本征值理论吸出有价值的结果后消失（daß der Matrizenkalkül, nach Aufsaugung seiner wertvollen Resultate durch die Eigenwerttheorie, wieder verschwinden wird）"。在脚注中有一句据说是 Erwin Fues 的回忆，薛定谔在一场报告后在苏黎世大街上发火："现在哥廷恩的混蛋在用我的

漂亮波理论计算狗屎矩阵元（Jetzt benützen die verdammten Göttinger meine schöne Wellenmechanik zur Ausrechnung ihrer Scheiß-Matrixelemente）"。物理学家也是文人。

5.2 专家视角的终极统一

从历史的长河来看，兰佐施、薛定谔、海森堡等人的争论最终在数学的更高维度上达成了和解。

1. **希尔伯特空间的统一**：
   冯·诺伊曼在1929-1932年间建立了基于抽象希尔伯特空间（Hilbert Space）的公理化体系。他证明了：
   - 海森堡的矩阵力学等价于在希尔伯特空间中选取离散基底（通常是能量本征态）来表示算符和状态。
   - 薛定谔的波力学等价于选取连续基底（通常是位置本征态）来表示。
   - 根据**里斯-费歇尔定理**（Riesz-Fischer Theorem），这两个空间（l^2 序列空间和 L^2 函数空间）是等距同构的[9]。
2. **路径积分的第三条路**：
   除了矩阵和波动，费曼（Feynman）在1948年提出了路径积分（Path Integral）表述。有趣的是，费曼的路径积分思想在精神上与兰佐施的积分方程形式有着深刻的联系，都强调了"传播子"（Propagator）或积分核的作用[26]。这进一步印证了兰佐施工作的先驱性。
3. **曹则贤的观点与风格**：
   作为本文作者，曹则贤研究员不仅是一位物理学家，也是一位科学史和语言学的考据者。他倾向于挖掘被主流叙事掩盖的细节（如兰佐施的贡献、玻恩的原始地位），并强调物理概念与数学形式之间的精确对应。他的写作风格兼具学术严谨性与个人化的犀利评论（如对"海森堡独占功劳"的调侃），旨在还原一个更真实、更复杂的科学发现过程[28]。

5.3 面向高三学生的嵌套学习：最终的裁判与启示

最终的裁判：希尔伯特空间

同学们，这场跨越数年的学术争论，最终告诉了我们什么？

1. **数学是物理的语言**：
   一开始，大家以为海森堡发现的是"粒子的跳跃"，薛定谔发现的是"物质的波动"。看似矛盾，其实是因为他们摸到了大象的不同部位。直到冯·诺伊曼用更高级的数学（泛函分析）把灯打开，大家才发现：哦，原来这只大象叫"希尔伯特空间中的矢量"！
   - **矢量（Vector）**： 就是量子态（State）。
   - **坐标系（Basis）**： 你可以选择"能量"做坐标轴（那是海森堡的矩阵），也可以选择"位置"做坐标轴（那是薛定谔的波函数）。
   - **变换（Transform）**： 从一种描述变到另一种描述，本质上就是做了一个坐标旋转（就像你们学过的坐标变换一样）。
2. **科学家的个性与人性**：
   文章最后那个八卦非常有意思。薛定谔虽然证明了两者等价，但他心里是极其不情愿的。他希望

自己的波力学能彻底干掉矩阵力学，因为他讨厌那种不直观的跳跃。他骂矩阵元是"狗屎"，海森堡骂波函数是"垃圾"，这说明伟大的科学家也是有血有肉、有情绪的人。他们对美的追求、对直观的执着，既推动了科学进步，也造成了激烈的冲突。

3. **给我们的启示**：
   当我们学习物理时，不要死记硬背公式。你要看到公式背后的结构。矩阵和微分方程看似完全不同，但在更深的层次上，它们遵循着同样的逻辑结构。寻找这种不同事物背后的统一性（Unification），是物理学最迷人的地方。

思考题:

如果有一天你发现一道物理题可以用画图解，也可以用列方程解，而且答案一样。你会觉得这是巧合吗？还是说，图形的几何性质和方程的代数性质之间，隐藏着某种神秘的联系？（提示：笛卡尔就是这样发明解析几何的！量子力学的等价性也是一样的道理。）

(全文完)

(注：本文翻译及解析基于曹则贤《矩阵力学与波力学的等价性问题（上）》一文及相关物理学史料。)

附录：三种量子力学形式的对比表

特征	矩阵力学 (Heisenberg/Born/Jordan)	波力学 (Schrödinger)	积分力学 (Lanczos
核心数学对象	无穷维矩阵 (Infinite Matrices)	波函数 (Wave Functions)	积分核 (Integral Ker
基本方程	$[q,p]=i\hbar$ (对易关系)	$H\psi=E\psi$ (微分方程)	$K\phi=\lambda\phi$ (积分方
物理图像	分立的能级跃迁，无轨道	连续的物质波分布	连续的场与核函数的
优点	强调可观测量，逻辑严密	直观，易于计算原子光谱	数学形式优美， 连接了离散与连续
缺点	极其抽象，难以可视化， 计算复杂	容易让人误以为电子真是波（其实是概率波）	数学工具冷门，处理
现代观点	能量表象下的算符运算	坐标表象下的算符运算	算符的积分核表示 (Function)

Works cited

1. 矩阵力学与波力学的等价性问题（上）.pdf
2. A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics - Dialnet, accessed on November 22, 2025, https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2735593.pdf
3. Cornelius Lanczos — Discoveries in the Quantum and General Relativity Theories - arXiv, accessed on November 22, 2025, https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0206054
4. Cornelius Lanczos ¤ Discoveries in the Quantum and General Relativity Theories - Fondation Louis de Broglie, accessed on November 22, 2025, https://fondationlouisdebroglie.org/AFLB-271/aflb271p085.pdf
5. The Uncertainty Principle (Stanford Encyclopedia of Philosophy), accessed on November 22, 2025, https://plato.stanford.edu/entries/qt-uncertainty/
6. Another look through Heisenberg's microscope - Haverford Scholarship, accessed on November 22, 2025, https://scholarship.haverford.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1669&context=physics_facpubs
7. 1947 American Journal of Mathematics 1 Wintner | PDF | Integral - Scribd, accessed on November 22, 2025, https://www.scribd.com/document/917225158/1947-American-Journal-of-Mathematics-1-Wintner
8. The Unboundedness of Quantum-Mechanical Matrices - Semantic Scholar, accessed on November 22, 2025, https://www.semanticscholar.org/paper/The-Unboundedness-of-Quantum-Mechanical-Matrices-Wintner/e5e84e651ee3c3765b29afe250b065db9b89825c
9. Why were two theories (Matrix Mechanics and Wave Mechanics) deemed logically - PhilSci-Archive, accessed on November 22, 2025, https://philsci-archive.pitt.edu/3658/1/perovic_preprint.pdf
10. The Equivalence Myth of Quantum Mechanics-Part II, accessed on November 22, 2025, http://www.staff.science.uu.nl/~mulle106/MythQM2-SHPMP1997.pdf
11. From Heisenberg and Schrödinger to the P vs. NP Problem - arXiv, accessed on November 22, 2025, https://arxiv.org/html/2511.07502v1
12. Born–Jordan Quantization and the Equivalence of the Schrödinger and Heisenberg Pictures - PMC - NIH, accessed on November 22, 2025, https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC4446074/
13. From Matrices to Hilbert Spaces: The Interplay of Physics and Mathematics in the Rise of Quantum Mechanics, accessed on November 22, 2025, https://d-nb.info/1277885494/34
14. Path Integrals in Quantum Mechanics - MIT, accessed on November 22, 2025, https://web.mit.edu/dvp/www/Work/8.06/dvp-8.06-paper.pdf
15. Mathematics meets physics - CORE, accessed on November 22, 2025, https://core.ac.uk/download/268003474.pdf
16. What does "kernel" mean in integral kernel? - MathOverflow, accessed on November 22, 2025, https://mathoverflow.net/questions/24098/what-does-kernel-mean-in-integral-kernel
17. Foundations of Differential Geometry Vol 1 - Kobayashi, Nomizu PDF - Scribd, accessed on November 22, 2025, https://www.scribd.com/document/357302786/Foundations-of-Differential-

Geometry-vol-1-Kobayashi-Nomizu-pdf
18. It's interesting how integrals are less "well-behaved" than derivatives. : r/math - Reddit, accessed on November 22, 2025, https://www.reddit.com/r/math/comments/mvuub1/its_interesting_how_integrals_are_less/
19. Operational Calculus in Quantum Mechanics. Some Critical Comments and the Solution of Special Problems - PNAS, accessed on November 22, 2025, https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.16.3.196
20. A History of the Theories of Aether and Electricity, Volume 2 - rexresearch1, accessed on November 22, 2025, https://www.rexresearch1.com/Books/WhittakerHistoryTheorAetherElectr2.pdf
21. Philosophical Rhetoric in Early Quantum Mechanics 1925–27: High Principles, Cultural Values and Professional Anxieties - UBC History, accessed on November 22, 2025, https://history.ubc.ca/wp-content/uploads/sites/23/2019/06/2011philquan.pdf
22. "The Heisenberg Method": Geometry, Algebra, and Probability in Quantum Theory - PMC, accessed on November 22, 2025, https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7513179/
23. The Uncertainty Principle (Stanford Encyclopedia of Philosophy/Winter 2002 Edition), accessed on November 22, 2025, https://plato.stanford.edu/archives/win2002/entries/qt-uncertainty/
24. Quantum Mechanics I. The Fundamentals [2 ed.] 2022021033, 9780367769987, 9780367776367, 9781003172178, 9780367770006, 9780367776428, 9781003172192 - DOKUMEN.PUB, accessed on November 22, 2025, https://dokumen.pub/quantum-mechanics-i-the-fundamentals-2nbsped-2022021033-9780367769987-9780367776367-9781003172178-9780367770006-9780367776428-9781003172192.html
25. The equivalence between Heisenberg and Schroedinger pictures - Physics Stack Exchange, accessed on November 22, 2025, https://physics.stackexchange.com/questions/173219/the-equivalence-between-heisenberg-and-schroedinger-pictures
26. Path integral formulation - Wikipedia, accessed on November 22, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Path_integral_formulation
27. Feynman's formulation of Quantum mechanics - Department of Theoretical Physics, accessed on November 22, 2025, http://www-f1.ijs.si/~ramsak/seminarji/susic.pdf
28. One Idea Makes You Extraordinary: How to Become a Scientific Giant - Popular Sciences, accessed on November 22, 2025, https://www.fltrp.com/c/2020-04-23/498232.shtml
29. [2411.13173] Writing Style Matters: An Examination of Bias and Fairness in Information Retrieval Systems - arXiv, accessed on November 22, 2025, https://arxiv.org/abs/2411.13173
30. Zexian Cao, accessed on November 22, 2025, https://in.iphy.ac.cn/list_yjy_e_js.php?id=318