平直空间散射振幅与天球共形对称性

（完整翻译与逐段深度解读）

---

arXiv:1701.00049v1 [hep-th] 31 Dec 2016

平直空间散射振幅 与天球共形对称性 Flat Space Amplitudes and Conformal Symmetry of the Celestial Sphere

Sabrina Pasterski\$^{1}, $Shu-HengShao$^{2}, $andAndrewStrominger$^{1}\$ [1] Center for the Fundamental Laws of Nature, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA \$^{2}\$School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

摘要 四维(4D)洛伦兹群 $SL(2,\mathbb{C})$ 在无穷远处的天球上扮演着二维(2D)全局共形群的角色，而渐近的4D散射态正是在天球上定义的。因此，4D平直空间振幅与共形球上的2D关联函数之间应有相似性，但这种相似性被一个事实所掩盖：前者（4D振幅）通常是用在时空平移下变换简单的渐近波函数来表示的，而不是在洛伦兹 $SL(2,\mathbb{C})$ 变换下。在本文中，我们在4D闵可夫斯基空间中构造了在壳有质量标量波函数，它们在 $SL(2,\mathbb{C})$ 变换下如同共形原初算符。由这些波函数构造的散射振幅天然具有 $SL(2,\mathbb{C})$ 协变性。对于特定的质量关系，我们明确展示了它们的三点振幅简化为2D CFT原初三点函数的已知唯一形式，并计算了其系数。这个计算通过闵可夫斯基空间的双曲切片上的类威腾(Witten-like)图自然地进行，并带有一种全息的味道。

深度解读：“摘要”——通往新宇宙的“寻宝图”

你们好，欢迎来到理论物理的最前沿。这篇摘要就像一部科幻电影的预告片，它提出了一个惊人的想法：我们生活的四维宇宙（3个空间维度+1个时间维度）可能是一个“全息投影”，而“投影幕”是一个位于无穷远处的二维球面，即“天球”。

让我们逐句拆解这个“预告片”：

- **“四维(4D)洛伦兹群 SL(2,C)...作用于天球...为二维(2D)全局共形群...”**
  - **核心思想：** 这句话是整篇论文的“魔法”所在。
  - **洛伦兹群 $SL(2,\mathbb{C})$：** 这就是你们在狭义相对论中学过的“洛伦兹变换”的“高级数学版”。它描述了在4D时空中所有的旋转和“助推”(boosts)——即所有保持光速不变的变换。
  - **天球(Celestial Sphere)：** 想象一下你站在地球上，所有星星“贴”在一个无限大的球面上——这就是天文学上的“天球”。在这里，物理学家重新定义了它：它是我们时空在“无穷远”处的边界，特别是“零无穷远”，也就是光线最终将到达的地方。
  - **2D共形群：** 这是一种在二维表面（比如天球）上的“完美”变换。它会缩放和平移，但始终保持“角度”不变。想象你用手机双指缩放一张照片，照片上所有物体的“形状”（即角度）都没变，只是变大了——这就是一种共形变换。

    - **“魔法”在于：** 论文的第一个惊人论断是，描述 **4D** 时空对称性的**洛伦兹群**，竟然和描述 **2D** 表面对称性的**共形群**，在数学上是**同一个东西**（同构）！这就像你发现你家地下室的钥匙，竟然能打开银行的金库大门。作者们认为，这绝非巧合，而是暗示我们的4D宇宙可以被一个2D的理论所描述。
- **“4D平直空间振幅...与...2D关联函数...相似性...被掩盖了...因为前者通常用...（平面波）...表示...”**
    - **“散射振幅”** 是物理学家用来计算粒子碰撞（比如在大型强子对撞机LHC里）结果的工具，它本质上是一个“概率”。**“关联函数”** 则是2D共形场论(CFT)中计算不同点上的场相互影响的工具。
    - 作者说：既然4D对称性 = 2D对称性，那么4D的“振幅”和2D的“关联函数”本应“长得很像”。但我们一直没看出来，为什么？
    - **答案：** 因为我们用错了“语言”。我们习惯的“语言”是“平面波”（你们在光学和量子力学里学过的 $e^{i(kx-\omega t)}$）。这种“语言”在描述“平移”（动量 k 很清楚）时很方便，但在描述“洛伦兹变换”（旋转和助推）时就变得一团糟。
- **“本文中，我们构造了...在 $SL(2,\mathbb{C})$ 变换下如同共形原初算符...的波函数...”**
    - **解决方案：** 既然“平面波”这套“语言”不好用，作者就“发明”了一套**新语言**。
    - 他们的新“语言”（即新的波函数）被精心设计，使其在洛伦兹变换下，变换方式“极其简单优美”——就像2D共形场论(CFT)中“最基本”的算符（称为“原初算符”）一样，只是简单地缩放，而不会变成其他乱七八糟的东西。
- **“由这些波函数...三点振幅简化为2D CFT...唯一形式...计算...在双曲切片上的类威腾图...具有全息风味。”**
    - **成果展示：**
        1. **成果1：** 他们用这套新“语言”去计算了一个最简单的粒子相互作用——“三点振幅”（例如一个粒子衰变为两个）。
        2. **成果2：** 他们发现，计算结果**完美地**重现了2D CFT理论中由对称性唯一决定的“三点函数”形式。
        3. **成果3（最精彩的）：** “全息风味”(holographic flavor)！他们发现，这个4D时空的计算，可以被等价地看作是在一个叫“双曲空间”(H3)的辅助空间中进行的。这种“把一个高维（4D）的计算转化为一个低维（3D）空间的计算”的思想，就是“全息原理”(Holography)的核心。
    - **总结：** 这篇论文为“我们的4D宇宙是一个2D全息投影”这个激进的猜想，提供了第一个坚实的、可计算的“证据”。

目录

深度解读：目录——寻宝图的“图例”

这张目录就是作者为我们绘制的“寻宝图”。它清晰地展示了他们的逻辑链条：

- **第1节 (引言)：** 告诉我们“为什么”要寻宝。它提出了一个大问题（4D散射与2D CFT的关系），并指出了“宝藏”的大致方向（天球对称性）。
- **第2节 (共形主波函数)：** 这是在“打造工具”。寻宝需要特殊的工具，标准的“平面波”铁锹不好用。作者在这里“发明”了一把“共形主波函数”的铲子（2.1节），并展示了如何打磨它，让它能处理无质量和有质量的情况（2.2节）。
- **第3节 (三点振幅)：** 这是“实地挖掘”。作者带着新工具（第2节的波函数）去挖一个“试验坑”（最简单的三点相互作用）。他们挖出了“宝藏”（公式3.13），证明了他们的工具确实能挖到东西，而且挖出来的东西（一个2D CFT关联函数）和地图（第1节的猜想）完美吻合。
- **附录A (内积)：** 这是“工具质检报告”。任何新“工具”（波函数）都必须符合量子力学的“安全标准”（即内积要合理，不能出现无穷大或自相矛盾）。附录A的计算证明了这把新铲子是合格的、可以安全使用的。
- **参考文献：** 这是“巨人的肩膀”。它告诉我们，作者的“寻宝图”是基于哪些前辈（如Dirac, Witten, Strominger等）的工作绘制出来的。

---

1 引言

四维(4D)闵可夫斯基空间中的量子场论(QFT)散射振幅通常是用的自由波动方程的渐近平面波解来表示的。由于平面波只是简单地获得一个相位，而这个相位会因为动量守恒而抵消，因此平移不变性是显然的。$SL(2,\mathrm{C})$ 洛伦兹不变性则更为微妙，因为平面波在洛伦兹变换下会非平凡地转变为彼此的叠加。

> **深度解读：**
>
> 这里深入解释了摘要中提到的“语言”问题。物理学家计算粒子碰撞（散射振幅）时，通常假设粒子在“无穷远”的过去和未来是自由的，并用“平面波”（ `e^{i(kx-ωt)}` ）来描述。
>
> - **“平移不变性是显然的”：** “平面波”是“平移”操作的“本征态”。这意味着当你把一个平面波在空间中平移一段距离 `a` ，它仅仅是“乘以”了一个相位因子 `e^{ika}` 。在粒子碰撞中，所有粒子获得的相位因子必须因为“动量守恒”而完全抵消。因此，使用平面波时，动量守恒（平移不变性的结果）是一目了然的。
> - **“洛伦兹不变性则更微妙”：** “微妙”(subtle)是物理学家在说“极其繁琐和丑陋”时的委婉说法。当你对一个平面波（代表一个特定动量的粒子）进行“洛伦兹助推”（boost，比如你换一个高速运动的参考系去看它），它**不会**变成另一个单一的平面波。它会变成一堆具有**不同动量**的平面波的“线性叠加”。这使得验证洛伦兹对称性（狭义相对论的基本要求）变得异常困难，对称性隐藏在复杂的数学背后。

在本文中，我们为有质量标量波动方程找到了一个 $SL(2,\mathrm{C})$ 原初（primary）解的基底，并将某些4D散射振幅重铸为一种显然的 $SL(2,\mathrm{C})$ 协变形式。这种形式在二维(2D)共形场论(CFT)的研究中非常熟悉，在CFT中 $SL(2,\mathrm{C})$ 扮演着全局共形群的角色。

> **深度解读：**
>
> 这就是本文的“解决方案”。既然“平面波”这个“基底”（你可以想象成坐标系的x, y, z轴）让洛伦兹变换变得复杂，作者们说：“那我们就换一个‘基底’！”
>
> - **“$SL(2,\mathrm{C})$ 原初解的基底”：** 这就是他们“发明”的新“坐标系”。在这个新“基底”下，平移不变性（动量守恒）反而变得“微妙”了，但是 $SL(2,\mathrm{C})$ **洛伦兹变换** 却变得“显然”了。
> - **“重铸...为...协变形式”：** “协变”意味着在变换下形式保持优美。作者的目标是，让4D的散射振幅在洛伦兹变换下，其变化方式和2D共形场论(CFT)中的“关联函数”一模一样。
> - **视角转换：** 这是一个关键的“视角转换”。我们不再问“这个粒子动量是多少？”，而是问“这个粒子在洛伦兹变换下的‘共形维度’ Δ 是多少？”。

2D共形群的出现并非巧合，因为洛伦兹群在天球（用 CS^2 表示）上扮演的正是全局共形群的角色，而渐近态正是在天球（位于零无穷远处）上定义的。

> **深度解读：**
>
> 这句话再次强调了那个“惊人的巧合”：4D洛伦兹群 = 2D共形群。这不是一个凭空想象，而是有坚实数学基础的。

- **“零无穷远”(Null Infinity)：** 这是光线（零的）传播到“无穷远”时所能到达的地方。它是一个时空的“边界”。
- **“天球” CS^2：** 这个“边界”的形状，恰好是一个二维球面（S^2）再乘以一个时间（R）。在任何一个“时刻”，这个边界就是一个二维球面，也就是“天球”。
- **“渐近态...在天球上定义”：** 当我们谈论一个“粒子”，我们实际上是在谈论它在“无穷远”未来（或过去）的状态。所有粒子，无论有质量还是无质量，最终都会飞向无穷远。它们在无穷远处的“位置”信息，就被编码在它们“撞击”天球的那个点上。
- **结论：** 既然粒子是在“天球”上定义的，而“天球”上的对称性（2D共形群）又恰好等于我们4D时空的对称性（洛伦兹群），那么，用天球的“语言”（2D CFT）来描述4D的粒子散射，一定是最自然、最深刻的。

对散射振幅的 $SL(2, C)$ 性质的研究可以追溯到狄拉克，但最近出现了一个对此主题感兴趣的新理由。当引力耦合时，[2-5]中猜测 $SL(2, C)$ 会被增强为完整的无限维局域共形（或Virasoro）群。这个猜想最近在[6-8]中被证明，它在树图级别$^{1}上是中新的次领头软引力子定理的推论。^{2}$ 尽管完整的Virasoro对称性只在引力耦合时出现，但任何能够与引力耦合的QFT的散射振幅都被约束为“Virasoro-ready”（为Virasoro对称性准备好的）。[3]

深度解读：

这是一个“背景介绍”和“动机升级”，解释了“为什么是现在？”

1. **“可追溯到狄拉克”：** 80多年前，物理学大师狄拉克（P. A. M. Dirac）就玩过这个“4D洛伦兹群 = 2D共形群”的数学游戏，但他没有找到“物理应用”。
2. **“新理由（引力）”：** 近年的新发现是，当你考虑“引力”时，这个对称性会“升级”！`SL(2,C)` 只是一个“有限”的对称群（只有6个参数，对应3个旋转和3个助推）。而“Virasoro群”是一个“无限维”的对称群（它可以独立地变换天球上的每一个点）。
3. **“软引力子定理”：** 这是一个关于“引力子”（传递引力的粒子）在“低能量”（软）极限下表现的定理。惊人的是，这个定理的数学结构“恰好”等同于Virasoro群的对称性要求！
4. **“Virasoro-ready”：** 这是最关键的逻辑链： * (a) “软引力子定理”是一个（已被证明的）事实。 * (b) 这“意味着”4D引力理论具有Virasoro对称性。 * (c) 既然“万物皆有引力”，任何一个“现实”的量子场论(QFT)都必须能够与引力“耦合”。 * (d) 因此，即使我们暂时“忽略”引力，只研究QFT，这个QFT也必须是“Virasoro-ready”的，即它必须“天生”就具有一种可以被“升级”到Virasoro对称性的结构。 * (e) 什么样的结构是“Virasoro-ready”的？答案：**2D共形场论(CFT)**！

^{1}脚注1： 次领头软定理有一个单圈精确的反常[9-12]，其效应仍有待理解，但在中最近有所讨论。 **^{2}脚注2：** 人们可能希望4D量子引力散射振幅最终能被发现具有一个对偶的全息表示，即在 CS^2 上的某种奇异的2D CFT，但目前还没有此类构造的提议。 **^{3}脚注3：** 这推广了那个众所周知的约束，即任何可以与引力耦合的QFT都必须具有一个局域守恒的应力张量。

解读脚注：

- **脚注1：** 这是一个技术性的“免责声明”，说明这个“Virasoro对称性”在量子（圈图）层面可能会被“反常”（量子效应）所破坏，目前还不完全清楚。
- **脚注2：** 这是作者们的“终极梦想”：建立一个完整的“天球全息”（Celestial Holography）理论，即 **4D量子引力 = 2D CFT on** CS^2。他们坦率地承认，目前“还没有此类构造的提议”。这篇论文，就是朝着这个“梦想”迈出的“婴儿学步”。
- **脚注3：** 这是一个绝佳的类比，帮助你理解“Virasoro-ready”的含义。你们知道，任何物理系统，如果它具有“时空平移不变性”（比如物理定律在上海和在纽约都一样），就必然对应一个“能量-动量守恒”。在场论中，这个守恒定律的体现就是“守恒的应力张量”。现在，作者们在说一个更强的约束：如果一个理论“可以”和引力耦合（即“万物皆有引力”），它就必须满足一个更强的“Virasoro对称性”。

这表明它们应该类似于2D CFT关联函数的某个子集，可能涉及复数和连续的共形维度。事实上，人们已经观察到软光子振幅具有2D流代数（current algebra）的形式。在这里，我们寻求理解4D散射振幅在远离软极限的2D描述。

深度解读：

这里提出了这个“2D CFT”的两个“奇异”特征：

1. **“复数和连续的共形维度”：** 在你们将来可能学到的“标准”CFT（如二维伊辛模型）中，共形维度 Δ 都是“实数”和“离散的”（比如 $\Delta = 1/8, 1/2, ...$）。而作者们在这里预言，这个与我们4D宇宙对偶的2D CFT，将是一个“奇异的”CFT，其维度 Δ 是“复数”和“连续的”（比如 Δ 可以是 $1.5 + 7i$）。（剧透：这个预言将在附录A中被证实！）
2. **“远离软极限”：** 之前的工作（软光子）和（软引力子）只在“软极限”（即 $E \to 0$）下才有效。而本文的目标是“硬”的，他们想为“任何能量”的粒子（特别是“有质量”的粒子）建立这个2D描述。

本文考虑有质量标量三点函数，并将它们重铸为天球 CS^2 上2D CFT关联函数的标准形式。总结一下结果，令 X^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ 为闵可夫斯基空间中的平直坐标。在 CS^2 上（其中 $X^\mu X_\mu = 0$）的一个自然坐标是

$$w = \frac{X^1 + iX^2}{X^0 + X^3}$$

(1.1)

洛伦兹变换在 CS^2 上扮演着全局共形群的角色

$$w \to \frac{aw+b}{cw+d}$$

(1.2)

这里的复数参数 a, b, c, d 满足 $ad - bc = 1$。我们将构造一个由 CS^2 上的点 w 和一个 $SL(2, \mathrm{C})$ 权重 Δ 标记的三参数解族（而不是由空间动量 p 的三个分量标记的平面波），它们会像共形原初算符一样变换。我们将在下面发现，它们很自然地展现在闵可夫斯基空间的双曲切片中，这与中所倡导的平直空间全息形式相一致。$SL(2, \mathrm{C})$ 接着意味着4D树图振幅取如下形式

$$\widetilde{\mathrm{A}}(w_i, \overline{w}_i) = \frac{C}{|w_1 - w_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|w_2 - w_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}|w_3 - w_1|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}$$

(1.3)

其中“OPE系数” C 依赖于三个渐近标量的质量、共形权重和三次耦合常数。我们推导出了一个 C 的积分公式，它涉及双曲切片上的类威腾图。在一般情况下，这个积分可能无法以闭合形式计算，但它在“近极值”情况（即入射粒子只比出射粒子质量总和略重）下得到了简化，并将在下文明确给出。

深度解读：

这是引言的“高潮”和“路线图总结”，明确了本文的“任务”。

- **公式(1.1)：** 这是“天球坐标” w 的**定义**。w 是一个复数（包含 X^1 和 X^2）。这个公式是一种“立体投影”，类似于把地球（球面）投射到一张平的地图（复平面）上。它精确地告诉我们，一个沿 (X^0, X^1, X^2, X^3) 方向运动的光子，最终会“击中”天球上的哪一个点 w。
- **公式(1.2)：** 这是**核心数学**。它显示了4D的洛伦兹变换（旋转和助推）是如何作用在这个2D地图上的。这种 $w \to (aw+b)/(cw+d)$ 形式的变换，正是“莫比乌斯变换”，也是2D共形变换最基本的形式。这在数学上证明了“4D洛伦兹群 = 2D共形群”。
- **公式(1.3)：** 这是“最终答案”的“形式”。
  - 左边 $\widetilde{\mathrm{A}}$ 是4D的散射振幅（用新“语言” w 写的）。
  - 右边是2D CFT中“三点关联函数”的**唯一**形式。对称性（公式1.2）是如此强大，它完全固定了答案的形式，只留下一个未知常数 C。
- **本文的核心任务：** 引言至此，作者已经把一个复杂的物理问题（计算4D散射振幅）简化（或说转化）为一个“更简单”的数学问题：
  1. **任务一（第2节）：** 构造出能用 w 和 Δ 标记的波函数（即那套“新语言”）。
  2. **任务二（第3节）：** 用这个波函数去计算那个未知的常数 C（在“近极值”这个简化情况下）。

- **“双曲切片”与“威腾图”：** 这是“如何”计算 C 的线索。作者们发现，这个计算 C 的4D积分，可以被“全息”地等效为一个在“3D双曲空间”中的积分，这种积分在AdS/CFT中被称为“威腾图”(Witten Diagram)。

其他易处理的例子将会非常有意义。特别是，$\mathrm{N} = 4$ 振幅的优美结构表明，当它们被重写为 CS^2 上的关联函数时，可能会呈现一种特别漂亮的形式。在中，对此类振幅的一个贡献（来自前向光锥内部）被表示为一个威腾图，但要获得完整的振幅，还必须加入额外的、更难计算的贡献（来自光锥外部）。这仍然是一个悬而未决的开放问题。

深度解读：

作者在这里“抛砖引玉”，指出他们的“新语言”可能会有更广阔的应用。

- **“$\mathrm{N} = 4$ 振幅”：** 这是一种“超对称”理论，是理论物理学家的“完美玩具模型”，它的散射振幅具有令人难以置信的简洁和优美的数学结构。
- **“开放问题”：** 作者们相信，如果用他们的新“天球”语言来重写 $\mathrm{N} = 4$ 振幅，可能会揭示出更深刻的结构。但他们坦承，目前的技术（如中的）还不足以计算“全部”的振幅，这是一个“开放问题”，等待着下一代物理学家（可能就是你）来解决。

双曲切片的效用在中被Ashtekar和Romano在一个与此有些相似的背景下注意到。de Boer和Solodukhin在中启动了一个程序，试图通过双曲切片，在AdS全息的背景下理解平直空间全息。软定理和散射的某些方面在[8, 19-21]中被双曲地研究过。在最近共形自举程序复兴的背景下，共形对称性在嵌入的闵可夫斯基空间中的线性实现已被用于简化计算，例如AdS中的共形块和传播子[22-26]。

深度解读：

这最后一段是“文献综述”，将本文的工作“定位”在更广阔的研究领域中。作者在告诉我们，他们并不是“孤军奋战”：

- ****：前辈们（Ashtekar, de Boer, Solodukhin）早就意识到“双曲空间”（即有质量粒子的动量空间）在全息术中可能很重要。
- **[8, 19-21]**：最近的“软定理”研究也用到了双曲空间。
- **[22-26]**：在另一个（更成熟的）领域“AdS/CFT”中，物理学家（如Costa, Penedones, Rychkov等）已经在使用类似的思想（“嵌入空间”）来简化“共形场论”的计算。
- **本文的定位：** 本文的工作是“承上启下”的。它将AdS/CFT中的计算技术（如[22-26]的“共形块”思想和的“双曲切片”）与“渐近对称性”（如的“软定理”）的“新动机”结合起来，去计算一个“经典”的QFT问题（有质量标量散射），并为“天球全息”这个“新梦想”（如所倡导的）提供了第一个坚实的计算范例。

本文的大纲如下。在第2节中，我们定义并构造了有质量和无质量标量波函数，它们是洛伦兹群 $SL(2,\mathrm{C})$ 的共形原初算符。我们的构造，即下文的方程(2.10)，是平面波与 H_3（双曲切片）上的体-边界传播子的卷积，并用贝塞尔函数给出了计算结果。我们还提出了一个积分变换，它将一个有质量标量

散射振幅转换为一个 $SL(2,\mathbb{C})$ 协变的关联函数。在第3节中，我们在近极值极限下计算了有质量共形主波函数的三点振幅。主要结果是方程(3.13)。在附录A中，我们计算了这些主波函数对于固定质量的克莱因-戈登内积。

深度解读：

这是引言的最后一段，是对“寻宝图”（目录）的详细“文字说明”，再次确认了本文的路线：

1. **第2节：造工具。** 目标是(2.10)和(2.17)，即那个“新语言”（共形主波函数）的数学公式。
2. **第3节：挖宝藏。** 目标是(3.13)，即那个“三点振幅”的计算结果，它将证明4D散射 ≈ 3D威腾图 ≈ 2D CFT。
3. **附录A：质检。** 确保新工具符合量子力学的“安全标准”（内积）。

---

2 共形主波函数

在本节中，我们构造了作为洛伦兹群 $SL(2,\mathbb{C})$ 的共形原初算符的标量波函数。一个质量为 m、共形维度为 Δ 的标量共形主波函数 $\phi_{\Delta,m}(X^\mu;w,\overline{w})$ 由以下两个性质定义：

深度解读：

现在我们正式开始“打造工具”（如第1节所承诺的）。本节的目标是“发明”一种新的波函数 ϕ，这个 ϕ 必须同时满足两个“设计要求”：一个来自“物理”（必须是真实的粒子），一个来自“对称性”（必须变换优美）。

1. 它是一个质量为 m 的克莱因-戈登方程的解，[4]

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^\nu}\frac{\partial}{\partial X_\nu}-m^2\right)\phi_{\Delta,m}(X^\mu;w,\overline{w})=0$$

. (2.1)

深度解读：

“设计要求一”（物理学）： 这个波函数必须描述一个“真实”的、质量为 m 的标量（无自旋）粒子。

- **克莱因-戈登方程：** 这是描述（无自旋）粒子最基本的波动方程，它是薛定谔方程的“相对论版本”。
- X^ν： 这是四维时空坐标 (t,x,y,z)。
- $\frac{\partial}{\partial X^\nu}\frac{\partial}{\partial X_\nu}$： 这是四维的“拉普拉斯算符”，即 $d'Alembertian$ 算符 $\Box^2$。根据脚注4的约定，它是 $(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})$。

- m^2： 质量的平方。
- **意义：** 这个方程(2.1)就是狭义相对论中的能量-动量关系 $E^2 - p^2 = m^2$ 的“波函数版”。（在量子力学中，$E \to i\frac{\partial}{\partial t}$，$p \to -i\nabla$）。

2. 它在 $SL(2,\mathbb{C})$ 洛伦兹变换下，像二维共形（准）原初算符一样协变地变换，

$$\phi_{\Delta,m}(\Lambda^{\mu}_{\nu}X^{\nu};\frac{aw+b}{cw+d},\frac{\overline{aw}+\bar{b}}{\overline{cw}+\bar{d}}) = |cw+d|^{2\Delta}\phi_{\Delta,m}(X^{\mu};w,\overline{w})$$

, (2.2) 其中 $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ 且 $ad-bc=1$，$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 是其在四维表示下的关联 $SL(2,\mathbb{C})$ 群元素。[5]

深度解读：

“设计要求二”（对称性）： 这个波函数必须“变换优美”。公式(2.2)就是“优美”的数学定义。

- **左边：** φ 经历了两次变换：
  1. **4D时空变换：** 它的“时空坐标” X^{ν} 被一个洛伦兹矩阵 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 变换了（例如旋转或助推）。
  2. **2D天球变换：** 它的“天球坐标” w 被一个莫比乌斯变换（公式1.2）变换了。
- **右边：** φ 根本没变！它只是乘上了一个因子 `|cw+d|^{2Δ}` 。
- **意义：** 这意味着 φ 成功地将复杂的4D洛伦兹变换 Λ “翻译”成了一个简单的2D缩放。Δ (Delta) 在这里扮演了“缩放维度”(conformal dimension)的角色，它告诉我们这个函数在缩放变换下的“权重”。
- **“准原初”：** “原初”(primary)算符是指在“所有”共形变换下都这么变换；“准原初”(quasi-primary)是指只在“全局”共形变换（即 $SL(2,\mathbb{C})$）下这么变换。

注意到，与AdS/CFT中的情况相反，这里的质量 m 和共形维度 Δ 是没有关联的。

深度解读：

这是一个“专家提示”，告诉我们“天球全息”与更成熟的“AdS/CFT”是不同的。

- **AdS/CFT（弯曲空间全息）：** 在那里，一个 AdS_{d+1} 空间中的质量 m **唯一确定**了其边界 CFT_d 上的维度 Δ（通过一个类似 $\Delta(\Delta-d)=m^2L^2$ 的公式）。
- **平直空间全息（本文）：** 在这里，m（粒子质量）和 Δ（洛伦兹变换的权重）是**两个独立的参数**。这意味着一个质量为 m 的粒子（比如电子），可以对应天球上“一整族”具有不同 Δ 的算符。这正是附录A中“连续维度”的体现。

^{4}我们将使用 $(-,+,+,+)$ 作为 $\mathbb{R}^{1,3}$ 中的度规约定。 ^{5}不存在将天球规范地（canonically）嵌入闵可夫斯基空间光锥的方法。因此，也不存在将 w 上的莫比乌斯变换与四维表示下的 $SL(2,\mathbb{C})$ 元素 ${\Lambda^{\mu}}_{\nu}$ 规范地关联起来的方法。事实上，任何两个相差一

个 $SL(2,\mathbb{C})$ 共轭的 ${\Lambda^{\mu}}_{\nu}$ 在我们的定义中都同样好。在下文中，我们将通过固定(2.6)中 $\hat{p}^{\mu}$ 的参考系来选择一个 ${\Lambda^{\mu}}_{\nu}(a,b,c,d)$ 的映射。更明确地说，${\Lambda^{\mu}}_{\nu}$ 是作用在 $\hat{p}^{\mu}$ 上的 $SL(2,\mathbb{C})$ 变换矩阵，通过将(2.4)代入(2.6)得到。

深度解读脚注：

- **脚注4：** 这是一个技术约定。它定义了时间的度规是“负”的（$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$）。这意味着“类时”间隔（比如你的世界线）$ds^2 < 0$，“类空”间隔 $ds^2 > 0$。
- **脚注5：** 这是一个微妙的数学问题。4D洛伦兹变换（Λ）和2D共形变换（a, b, c, d）在数学上是“同构”的，但它们之间没有“唯一”的“字典”。就像英语的“Love”和法语的“Amour”都指“爱”，但它们背后的文化内涵（“规范”）不完全一样。作者说，我们必须“选择一个”字典（即“固定一个参考系”），一旦选定，就必须坚持使用。

2.1 积分表示

有质量标量场的共形主波函数可以从三维双曲空间 H_3 中的体-边界传播子(bulk-to-boundary propagator)的傅里叶变换来构造。令 $(y, z, \bar{z})$ 为 H_3 的庞加莱(Poincaré)坐标，其度规为，

$$ds^2_{H3} = \frac{dy^2 + dz d\bar{z}}{y^2}$$

(2.3) 这里 $0 < y < \infty$ 且 $y = 0$ 是 H_3 的边界。这个几何具有 $SL(2,\mathbb{C})$ 等距同构，其作用为

$$z \to z' = \frac{(az+b)(\overline{cz}+\bar{d}) + a\bar{c}y^2}{|cz+d|^2 + |c|^2y^2}$$

$$\bar{z} \to \bar{z}' = \frac{(\overline{az}+\bar{b})(cz+d) + \bar{a}cy^2}{|cz+d|^2 + |c|^2y^2}$$

$$y \to y' = \frac{y}{|cz+d|^2 + |c|^2y^2}$$

(2.4) 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 且 $ad - bc = 1$。H_3 可以被嵌入到 $\mathbb{R}^{1,3}$ 中，作为单位双曲面

$$-(\hat{p}^0)^2 + (\hat{p}^1)^2 + (\hat{p}^2)^2 + (\hat{p}^3)^2 = -1$$

(2.5) 的两个分支（$\hat{p}^0 > 0$ 或 $\hat{p}^0 < 0$）之一。

深度解读：

这是“解决方案”的“灵感来源”。作者要同时满足(2.1)和(2.2)这两个“设计要求”，直接在我们的4D时空（闵可夫斯基空间） `X^μ` 中求解太难了。

- **“天才的跳跃”：** 他们发现，这个问题的答案“隐藏”在另一个空间——“动量空间” `p^μ` 中。
- **洞察：** 你们知道，有质量粒子的四维动量 `p^μ` 满足 $p \cdot p = -m^2$（使用 $(-,+,+,+)$ 度规）。如果我们考虑一个“单位”四动量 $\hat{p}^\mu = p^\mu/m$，那么它满足 $\hat{p} \cdot \hat{p} = -1$。
- **公式(2.5)：** 这个方程 $-(\hat{p}^0)^2 + (\hat{p})^2 = -1$ 在4D动量空间中定义的“曲面”，在数学上**正是一个“三维双曲空间”(H_3)**！
- **新策略：** 既然 `H3` （动量空间）与 `SL(2,C)` （洛伦兹群）“天然兼容”（洛伦兹变换就是 `H3` 的“旋转”，即等距同构(2.4)），作者决定：
  1. 先在 `H3` 空间中找到一个“变换优美”的函数。
  2. 然后，用一个“傅里叶变换”把这个 `H3` 上的函数“投影”回我们的4D时空 `X^μ` 。
- 公式(2.3)和(2.4)只是 `H3` 空间的“技术定义”，它告诉我们这个空间长什么样以及它的对称性。

更明确地说，我们可以选择这个嵌入映射 $\hat{p}^\mu : H_3 \to \mathbb{R}^{1,3}$，对于上双曲面（对应一个出射粒子），为

$$\hat{p}^\mu(y, z, \bar{z}) = (\frac{1 + y^2 + |z|^2}{2y}, \frac{Re(z)}{y}, \frac{Im(z)}{y}, \frac{1 - y^2 - |z|^2}{2y})$$

(2.6) 这导出了一个有用的关系

$$z = \frac{\hat{p}^1 + i\hat{p}^2}{\hat{p}^0 + \hat{p}^3}$$

(2.7)

深度解读：

- **公式(2.6)：** 这是 `H3` （动量空间）和4D动量 `p^μ` 之间的“换算公式”或“字典”。它告诉你 `H3` 上的一个点（由 `y` 和 `z` 定义）对应于哪一个4D单位动量 `p^μ` 。
- **公式(2.7)：** 这是(2.6)的“逆公式”。它告诉我们， `H3` 上的复坐标 `z` ，其实就是4D动量的一种“立体投影”。**请注意：** 这个 `z` 和我们引言(1.1)中的 `w` 长得**一模一样**！只是 `w` 是用**位置** `X` 定义的，而 `z` 是用**动量** `p` 定义的。这暗示了“位置”和“动量”在无穷远处（天球上）的深刻联系。

令 $G_\Delta(y, z, \bar{z}; w, \bar{w})$ 为 H_3 中共形维度为 Δ 的标量体-边界传播子，

$$G_\Delta(y,z,\bar{z};w,\bar{w}) = (\frac{y}{y^2+|z-w|^2})^\Delta$$

(2.8) 它在 $SL(2,\mathbb{C})$ 变换(2.4)下协变地变换，

$$G_\Delta(y',z',\bar{z}';w',\bar{w}') = |cw+d|^{2\Delta}G_\Delta(y,z,\bar{z};w,\bar{w})$$

, (2.9) 其中 $w' = (aw+b)/(cw+d)$ 且 $\bar{w}' = (\overline{aw}+\bar{b})/(\overline{cw}+\bar{d})$。

深度解读：

- **公式(2.8)：** 这是“新策略”中的“关键积木”。 `G_Δ` 是 H_3 空间中的“体-边界传播子”。
- **物理图像：** 想象 `H3` 空间（即动量空间）的边界 $y=0$ 处有一个“源”，位于 $z=w$ 点。这个“源”在 H_3 “体内”的一个点 (y,z) 处产生了多大的“影响”？答案就是(2.8)。
- **公式(2.9)：** 这是“验收”。作者检查了这块“积木” `G_Δ` ，发现它**恰好**具有我们想要的“优美变换”性质（与(2.2)中 `φ` 的变换性质几乎一样）。 `w` 是边界点坐标， `z` 是体内点坐标。

有质量标量的共形主波函数是

$$\phi^\pm_{\Delta,m}(X^\mu;w,\bar{w}) = \int_0^\infty \frac{dy}{y^3}\int dzd\bar{z}G_\Delta(y,z,\bar{z};w,\bar{w})\exp[\pm im\hat{p}^\mu(y,z,\bar{z})X_\mu]$$

(2.10) 其中我们为入射（outgoing）粒子选择负（plus）号，为出射（incoming）粒子选择正（minus）号。[原文如此，但符号±应反过来，正号($e+$)为出射，负号($e-$)为入射] 在下一小节中，我们将看到潜在的发散积分可以通过将质量 m 复数化，以一种 $SL(2,\mathbb{C})$ 协变的方式来调节，并且(2.10)会用贝塞尔函数表示。

深度解读：

这就是“总装图纸”！ 这就是本节的核心成果，即“共形主波函数”的构造公式。

- `G_Δ(...)` **：** 这是从 `H3` （动量空间）借来的、保证“变换优美”（满足要求二）的“灵魂”。
- `exp[±im p·X]` **：** 这是“平面波”的“肉体”。 `p` 是从 `(y,z)` 换算过来的（公式2.6）。它保证了波函数满足“克莱因-戈登方程”（满足要求一）。
- `∫...` **：** 这个积分（本质上是一个傅里叶变换）把“灵魂”和“肉体”结合起来，创造出了新的波函数 `φ` 。
- **结论：** (2.10)这个 `φ` **同时**满足了物理要求(2.1)和对称性要求(2.2)。**工具打造成功！**

很容易检查(2.10)确实是一个共形主波函数。首先，它满足有质量的克莱因-戈登方程，因为每个平面波因子 $e^{im\hat{p}\cdot X}$ 都满足。其次，由于 H_3 中体-边界传播子的 $SL(2,\mathbb{C})$ 协变性(2.9)，它是一个共形准原初算

符（在(2.2)的意义上）。我们对共形主波函数(2.10)的定义和公式可以很容易地推广到任意维度 $\mathbb{R}^{1,d+1}$ 的闵可夫斯基空间，并且它将在欧几里得 d 维共形群 $SO(1,d+1)$ 下协变地变换。

深度解读：

这是对(2.10)的“双重检查”，确认它满足两个“设计要求”：

1. **满足(2.1)（物理）？** 是的。因为 `φ` 是 `e^{im p·X}` 的积分（线性叠加）。既然每一个 `e^{im p·X}` （平面波）都满足克莱因-戈登方程，它们的“和”（积分）也必然满足。
2. **满足(2.2)（对称性）？** 是的。因为 `G_Δ` 具有(2.9)的优美变换性质，通过巧妙的数学（洛伦兹变换的积分测度不变性），这个性质会“遗传”给积分后的 `φ` 。

- **“可推广性”：** 作者指出，这个“新策略”（从动量空间的 H_{d+1} 构造）不仅适用于4D，而且适用于任意维度。这表明他们可能发现了一个非常“普适”的原理。

H_3 是通过映射(2.6)嵌入到动量空间，而不是位置空间，边界点 $(w,\overline{w})$ 似乎生活在动量空间的边界，而不是闵可夫斯基空间的边界。然而，这些空间是规范地等同的。一个自由有质量粒子的轨迹是

$$X^\mu(s) = \hat{p}^\mu s + X_0^\mu$$

(2.11) 在晚期时刻，$s \to \infty$，$-X^2 \to \infty$ 且

$$\frac{X^\mu}{\sqrt{-X^2}} \to \hat{p}^\mu$$

. (2.12) 也就是说，有质量的粒子渐近地趋向于闵可夫斯基空间双曲切片上的一个固定位置，这个位置由它们的四维动量决定。因此 $(w,\overline{w})$ 可以被解释为晚期渐近 H_3 切片的边界坐标。

深度解读：

这里作者在回答一个“哲学问题”： `w` 到底是什么的坐标？

- 我们最初在(1.1)中用**位置** `X` 定义了 `w` ，称它为“天球”（位置边界）上的点。
- 但后来我们在(2.7)和(2.8)中用**动量** `p` 定义了 `w` (或 `z`)，称它为“H_3”（动量边界）上的点。
- **这是否矛盾？**
- **不矛盾！** 公式(2.11)和(2.12)给出了答案。
- (2.11)是一个自由粒子的运动轨迹（ `s` 是时间）。
- (2.12)告诉我们，在“无穷远的未来”($s \to \infty$)，这个粒子的“位置” `X` 和它的“动量” `p` **几乎是同一个东西**（它们指向同一个方向）。

- **深刻洞察：** 这意味着“无穷远未来的位置边界”（我们的天球）和“动量空间的边界”（ `H3` 的边界）被“等同”起来了。 `w` 是一个“双面间谍”，它同时生活在这两个世界。这在物理上是合理的，因为在无穷远处，一个粒子将飞向哪个方向，完全由它出发时的动量决定。

尽管我们远未构造出任何这样的例子，的作者们推测，在 CS^2 上存在一个（某种奇异类型的）边界2D CFT，它的一部分关联函数就是4D体内的闵可夫斯基散射振幅。每一个体内场都将对偶于一个由其共形权重标记的连续算符谱。在这个假想的2D CFT中，标量体内场模(2.10)将全息地对偶于一个维度为 Δ 的局域标量边界算符 $\mathrm{O}_\Delta(w, \overline{w})$。

深度解读：

这是对“终极梦想”（脚注2）的再次申明。

- **假想：** 存在一个 2D CFT。
- **对偶：** 4D的“散射振幅” A **等于** 2D的“关联函数” $\langle \mathrm{OO}... \rangle$。
- **字典：** 我们4D时空中的一个“场”（比如“电子场”），对应到2D天球上**不是一个**算符，而是“一整族连续”的算符 O_Δ （由 Δ 标记）。
- **本文的贡献：** 我们新构造的波函数 $\phi_{\Delta,m}$ （公式2.10），正是4D这边“体内场模”的数学表示，它对应的就是2D那边的一个特定算符 O_Δ。

共形主波函数的 $SL(2,\mathrm{C})$ 协变性意味着由它们构造的任何散射振幅的 $SL(2,\mathrm{C})$ 协变性。令 p_j^μ 为 n 个质量为 m_j $(j = 1, \cdots, n)$ 的有质量标量的在壳动量。给定这些有质量标量的任意洛伦兹不变的 n 点动量空间散射振幅 $\mathrm{A}(p_j^\mu)$（包括动量守恒 δ 函数 $\delta^{(4)}(\sum_{j=1}^n p_j^\mu)$），共形主振幅 $\widetilde{\mathrm{A}}_{\Delta_1,\cdots,\Delta_n}(w_i, \overline{w}_i)$ 是

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\Delta_1,\cdots,\Delta_n}(w_i, \overline{w}_i) \equiv \prod_{i=1}^{n} \int_0^\infty \frac{dy_i}{y_i^3} \int dz_i d\overline{z}_i G_{\Delta_i}(y_i, z_i, \overline{z}_i; w_i, \overline{w}_i) \mathrm{A}(m_j \hat{p}_j^\mu)$$

, (2.13) 其中 $\hat{p}_j^\mu \equiv \hat{p}^\mu(y_j, z_j, \overline{z}_j)$ 由(2.6)给出，满足 $\hat{p}_i^2 = -1$。根据构造，$\widetilde{\mathrm{A}}_{\Delta_1,\cdots,\Delta_n}(w_i, \overline{w}_i)$ 在 $SL(2,\mathrm{C})$ 下协变地变换，

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\Delta_1,\cdots,\Delta_n}\left(\frac{aw_i + b}{cw_i + d}, \frac{\overline{aw}_i + \overline{b}}{\overline{cw}_i + \overline{d}}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} |cw_i + d|^{2\Delta_i}\right) \widetilde{\mathrm{A}}_{\Delta_1,\cdots,\Delta_n}(w_i, \overline{w}_i)$$

. (2.14)

深度解读：

- **公式(2.13)：** 这是“翻译机”的数学公式。
    - **输入：** $\mathrm{A}(p_j^\mu)$，任何用“旧语言”（平面波，动量 `p` ）写的“标准振幅”。

- **“翻译”过程：** 对每一个粒子 `i` ，都用(2.10)的“灵魂”部分（ `∫d(H3) G_Δ` ）进行积分。
- **输出：** $\widetilde{\mathrm{A}}(w_i)$，用“新语言”（共形波函数，天球坐标 `w` ）写的“新振幅”。

- **公式(2.14)：** 这是“质量保证”。这个“翻译机”保证了“新振幅” `Ã` 一定具有 `SL(2,C)` 协变性（即(2.2)的变换性质）。这正是我们想要的！

2.2 解析延拓与无质量波函数

积分表达式(2.10)只是共形主波函数的一个形式化定义，因为对于实质量 m，该积分是发散的。更严格地说，我们应该通过从一个非物理区域的解析延拓来定义我们的共形主波函数。

> **深度解读：**
>
> 作者在“坦白”：刚刚那个漂亮的公式(2.10)在数学上是“发散的”，即积分为无穷大。这是一个“Bug”。
>
> 这在物理学中很常见，一个看似完美的“灵感”在严格的数学计算面前会“崩溃”。但这并不意味着“灵感”是错的，只意味着我们需要更强大的数学工具来“驯服”它。
>
> 这就是“B计划”，名为“解析延拓”(Analytic Continuation)。

当质量为纯虚数 $m \in -i\mathrm{R}_+$ 且 X^μ 位于未来光锥内部时，出射波函数(2.10)是收敛的，并且可以被计算为

$$\phi^+_{\Delta,m}(X^\mu; w, \overline{w}) = \frac{4\pi}{|m|} \frac{(\sqrt{-X^2})^{\Delta-1}}{(-X^\mu q_\mu)^\Delta} K_{\Delta-1}(|m|\sqrt{-X^2})$$

, $m \in -i\mathrm{R}_+$, (2.15) 如果 $X^0 > 0, X^\mu X_\mu < 0$, 其中 q^μ 是 $\mathrm{R}^{1,3}$ 中的一个零矢量（null vector），定义为

$$q^\mu = (1 + |w|^2, w + \overline{w}, -i(w - \overline{w}), 1 - |w|^2)$$

. (2.16) 在得到这个贝塞尔函数表达式(2.15)之后，我们就可以将它解析延拓到实质量 m 和 $\mathrm{R}^{1,3}$ 的其他区域，

$$\phi^\pm_{\Delta,m}(X^\mu; w, \overline{w}) = \frac{4\pi}{im} \frac{(\sqrt{-X^2})^{\Delta-1}}{(-X^\mu q_\mu \mp i\epsilon)^\Delta} K_{\Delta-1}(im\sqrt{-X^2})$$

. (2.17) 我们引入了一个 $i\epsilon$ 约定来调节实质量 m 情况下的积分(2.10)。然而，在实践中，积分表示(2.10)将被证明在计算这些共形主波函数的散射振幅时更方便。

> **深度解读：**

这就是“B计划”的执行过程：

1. **步骤1（绕道）：** 我们先假装质量 `m` 是“虚数”（比如 $m = -5i$）。这在物理上毫无意义，但在数学上，它奇迹般地使(2.10)的发散积分“收敛”了。
2. **步骤2（计算）：** 在这个“虚质量”的“玩具世界”里，我们完成了积分（这是一个非常困难的积分，作者直接给出了答案），得到了一个“丑陋但封闭”的答案，即公式(2.15)。
3. **“答案”里有什么？** `* K_{\Delta-1}` ：这是“修正贝塞尔函数”，一种你们在大学才会学到的特殊函数。 `* X^2 < 0` ：表示 `X` 在光锥内部（类时）。 `* q^μ` ：(2.16)是一个“零矢量”（$q \cdot q = 0$），它代表了天球上 `w` 点所对应的那个“光线方向”。
4. **步骤3（返回）：** 有了这个答案(2.15)，我们再把它“解析延拓”回“真实世界”。我们只需把(2.15)中的 `|m|` 替换为 `im` ，就得到了“真实世界”的最终答案(2.17)。
5. **结论：** (2.10) 只是一个“灵感”，(2.17) 才是我们真正要用的“成品”波函数。 `iε` 是一个无穷小的“调节器”，保证数学上的一切都是“良定”的。

我们注意到，在晚期时刻，在未来光锥内部，波动方程呈现渐近形式

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2)\phi = (-\partial_\tau^2 - \frac{3}{\tau}\partial_\tau - m^2 + \cdots)\phi$$

, $\tau^2 = -X^\mu X_\mu \to \infty$. (2.18) 在 τ 很大时，其领先的非平凡解为

$$\phi = \frac{e^{\pm im\tau}}{\tau^{3/2}}\phi^{(0)}(y, z, \bar{z}) + \cdots$$

, (2.19) 其中 $\phi^{(0)}$ 是 H_3 上的任意函数。人们可以检查(2.17)在 $X^2 < 0$ 时具有此形式。 另一方面，在光锥外部接近空间无穷远处，我们有

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2)\phi = (\partial_\sigma^2 + \frac{3}{\sigma}\partial_\sigma - m^2 + \cdots)\phi$$

, $\sigma^2 = X^\mu X_\mu \to \infty$. (2.20) 在 σ 很大时，其领先的非平凡解为

$$\phi = \frac{e^{\pm m\sigma}}{\sigma^{3/2}}\tilde{\phi}^{(0)}(y, z, \bar{z}) + \cdots,$$

(2.21) 其中 $\tilde{\phi}^{(0)}$ 是 dS_3 上的任意函数。人们可以验证(2.17)在 $X^2 > 0$ 时具有此形式。[6]

深度解读：

这两段是“交叉验证”或“单元测试”。作者在检查他们那个“丑陋”的贝塞尔函数(2.17)是否“合理”。

- **测试1（光锥内，(2.18)）：** 在“无穷远的未来”（ `τ` 是固有时， `τ→∞` ），克莱因-戈登方程的解“应该”是什么样子？答案是(2.19)，它是一个振荡的（ `e^{imτ}` ）并以 `1/τ^{3/2}` 衰减的波。
- **测试2（光锥外，(2.20)）：** 在“无穷远的空间”（ `σ` 是空间距离， `σ→∞` ），解“应该”是什么样子？答案是(2.21)，它是一个指数衰减的（ `e^{-mσ}` ）波。
- **结果：** 作者说，他们“检查”过了，(2.17)这个贝塞尔函数在上述两个极限下，其行为（衰减方式）与(2.19)和(2.21)完全一致。这增加了他们对(2.17)是正确答案的信心。

^{6}当 X^μ 在光锥外时，应取(2.17)中对应于衰减指数的平方根。

从贝塞尔函数表达式(2.17)，我们可以取 $m \to 0$ 的极限，以获得无质量共形主波函数（假设 $Re(\Delta) > 1$）[7]

$$\phi^{\pm}_{\Delta,m=0}(X^\mu; w, \overline{w}) = \frac{1}{(-X^\mu q_\mu \mp i\epsilon)^\Delta}$$

(2.22) 无质量共形主波函数已在[2, 8, 19-21]中被考虑过。

深度解读：

这是“B计划”的一个“副产品”或“免费赠品”。

- $m \to 0$ **极限：** 通过一个简单的数学极限（当 `m→0` 时，贝塞尔函数 K 会简化），他们从那个“丑陋”的有质量波函数(2.17)“免费”得到了“无质量”粒子的共形主波函数(2.22)。
- **公式(2.22)：** 这个形式 `1/(-X·q)^Δ` 极其简洁优美！
- **再次验证：** 这个(2.22)的简洁形式，在以前的研究中[2, 8, 19-21]已经被（通过其他途径）讨论过了。这再次证明了他们构造的(2.17)是正确的，因为它能“兼容”所有已知的（有质量和无质量的）结果。

^{7}与(2.17)的无质量极限相比，这里我们省略了一个总体的常数因子。

---

3 有质量标量的三点振幅

在本节中，我们将考虑共形主波函数(2.10) $\phi^{\pm}_{\Delta_i,m_i}(X^\mu; w_i, \overline{w_i})$ 的树图级三点振幅 $\widetilde{\mathrm{A}}(w_i, \overline{w_i})$，它们通过 $\mathrm{R}^{1,3}$ 中的一个局域三次顶点相互作用

$$\mathrm{L} \sim \lambda\phi_1\phi_2\phi_3 + \cdots.$$

(3.1) 平面波的三点散射振幅则简单地是

$$\mathrm{A}(p_i) = i(2\pi)^4\lambda\, \delta^{(4)}(-p_1 + p_2 + p_3)$$

. (3.2)

深度解读：

现在进入“实战演习”（引言中预告的）。我们已经“打造”好了“新工具”（第2节的波函数 ϕ），现在我们要用它来“挖宝”。

- **“试验坑”：** 我们选择“最简单”的相互作用，即“三点振幅”（一个粒子1衰变为粒子2和3）。
- **公式(3.1)：** `L ~ λφ₁φ₂φ₃` 是描述这种相互作用的最简单的“拉格朗日量”（ `L` ）。 `λ` (lambda) 是“耦合常数”，代表这种相互作用的强度。
- **公式(3.2)：** 这是“旧语言”（平面波 `p` ）下的答案。它非常简单， `A` 就是 `λ` 乘以一个 δ 函数。这个 $\delta^{(4)}(-p_1 + p_2 + p_3)$ 的唯一作用就是“保证动量守恒”（$p_1 = p_2 + p_3$ ）。

对于共形主波函数，我们有

$$\widetilde{\mathrm{A}}(w_i, \overline{w_i}) = i\lambda \int \ d^4X \phi^-_{\Delta_1,m_1}(X^\mu; w_1, \overline{w}_1) \prod_{i=2}^{3} \phi^+_{\Delta_i,m_i}(X^\mu; w_i, \overline{w}_i)$$

, (3.3) 其中我们取第一个粒子为入射，另外两个为出射。三点振幅被 $SL(2, \mathrm{C})$ 协变性(2.2)固定为与二维CFT中的标准三点函数成正比：

$$\widetilde{\mathrm{A}}(w_i, \overline{w_i}) \sim \frac{\lambda}{|w_1 - w_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|w_2 - w_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}|w_3 - w_1|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}$$

(3.4) 尽管如此，能明确地看到这个公式在4D散射振幅中出现还是令人满意的。我们希望确定这个有限的比例常数，它是质量 m_i 和共形维度 Δ_i 的函数。在一般情况下，它们由积分表达式(3.3)给出，这个积分可能无法解析地计算。

深度解读：

- **公式(3.3)：** 这是“新语言”下的“问题”。它把三个“共形波函数” ϕ（我们第2节的“成品”）在同一个时空点 `X` “相遇”（即 $\phi_1\phi_2\phi_3$），然后在“所有”时空点 `X` 上积分（ `∫d⁴X` ），最后乘以相互作用强度 `λ` 。
- **公式(3.4)：** 这是“只靠对称性”猜出的“答案形式”。正如引言(1.3)所说， `SL(2,C)` 对称性是如此强大，它**直接规定**了答案必须长成(3.4)的样子（这个形式与2D CFT三点函数完全相同）。

- **本节任务：** (3.4) 只告诉了我们答案的“形状”，但没有告诉我们它的“大小”（即整体的比例常数，也就是引言里的 `C`）。本节的任务就是**强行算出** (3.3) 的积分，并将其与 (3.4) 对比，从而**确定**这个比例常数 `C(m, Δ)`。

我们将明确地在“近极值”情况（即第一个粒子的质量只比其他两个粒子的质量总和略重）下计算这个常数。在这种情况下，积分大大简化，三点振幅退化为 H_3 中的树图级三点威腾图。 令第一个粒子的质量为 $2(1+\epsilon)m$（$\epsilon \geq 0$），另外两个粒子的质量为 m。 计算 X^μ-积分，我们得到标量三点振幅的如下表达式，[8]

$$\widetilde{\mathrm{A}}(w_i, \overline{w}_i) = i(2\pi)^4 \lambda m^{-4} \left(\prod_{i=1}^{3} \int_0^\infty \frac{dy_i}{y_i^3} \int dz_i d\overline{z}_i\right) \prod_{i=1}^{3} G_{\Delta_i}(y_i, z_i, \overline{z}_i; w_i) \delta^{(4)}(-2(1+\epsilon)\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3)$$

(3.5) 其中 $\hat{p}_i^\mu \equiv \hat{p}^\mu(y_i, z_i, \overline{z}_i)$ 如(2.6)所定义。注意，对于一般的 $\epsilon \geq 0$，该积分并不具有 H_3 中树图级三点威腾图的形式。

深度解读：

- **“近极值”情况：** 作者承认，(3.3) 的积分**太难了**。为了能“算出答案”，他们采用了一个“简化”的物理情景。
  - **物理图像：** 粒子1的质量 $m_1 = 2(1+\epsilon)m$ **几乎**等于粒子2和3的质量之和 ($m_2 + m_3 = 2m$)。`ε` (epsilon) 是一个极小的正数（ `ε→0` ），代表粒子1只比“衰变阈值”重了“一点点”。
  - **意义：** 这意味着衰变几乎没有多余的能量释放，粒子2和3几乎是“背靠背”静止地产生的。
- **公式(3.5)：** 这是把(3.3)和(3.2)“混合”起来的结果。
  1. 他们用(2.10)的积分形式代入 ϕ。
  2. 他们先执行了(3.3)中的 `∫d⁴X` 积分。这个积分（本质上是 $\int e^{i(-p_1+p_2+p_3)\cdot X} d^4X$）产生了动量守恒的 δ 函数，即(3.2)中的 $\delta^{(4)}(\ldots)$。
  3. 于是(3.3)就变成了(3.5)：一个包含“三个” `H3` （动量空间）积分的“怪物”，被一个 δ 函数“约束”着。

^{8}我们将使用共形主波函数的积分表示(2.10)来简化振幅的计算，并最终在近极值极限下与 H_3 中的威腾图建立联系。然而，如第2节末尾所讨论的，我们共形主波函数的积分表示对于实质量 m 是发发散的，正确的定义需要从贝塞尔函数表达式(2.15)进行解析延拓。尽管如此，我们将看到使用积分表示计算出的三点振幅结果是有限的。

解读脚注8：

- 作者再次“坦白”，他们用的是“发散”的(2.10)来计算，而不是“成品”(2.17)。

- **为什么？** 因为(2.10)（积分形式）虽然“发散”，但在(3.5)的“组合”中，这个 δ 函数的“约束”非常强，它奇迹般地“杀死”了发散，使得最终的振幅 Ã 反而是“有限的”。这是一种计算上的“捷径”。

我们现在执行 $y_3, z_3, \overline{z}_3$-积分来消除三个 δ 函数。结果，我们有

$$\tilde{A}(w_i, \overline{w_i}) = i2(2\pi)^4\lambda m^{-4}(\int_0^\infty \frac{dy_1}{y_1^3}\int dz_1 d\overline{z_1})(\int_0^\infty \frac{dy_2}{y_2^3}\int dz_2 d\overline{z}_2)\prod_{i=1}^{3} G_{\Delta_i}(y_i, z_i, \overline{z}_i, \overline{w}_i, \overline{w}_i)$$

$$\times \frac{1}{2(1+\epsilon)y_1^{-1} - y_2^{-1}}\delta(\frac{2(1+\epsilon)}{y_1 - 2(1+\epsilon)y_2}[-2\epsilon y_1 y_2 + (y_2 - y_1)^2 + |z_2 - z_1|^2])$$

, (3.6) 其中我们已经替换了

$$y_3 = \frac{1}{2(1+\epsilon)y_1^{-1} - y_2^{-1}}$$

$$z_3 = \frac{2(1+\epsilon)y_1^{-1}z_1 - y_2^{-1}z_2}{2(1+\epsilon)y_1^{-1} - y_2^{-1}}$$

(3.7) 总体的因子2是由于重新整理 δ 函数的参数而产生的雅可比(Jacobian)行列式。 现在让我们将变量从 $(y_2, z_2, \overline{z}_2)$ 更改为 (R, θ, ϕ)，

$$y_2 = y_1 + R\, cos\, \theta$$

$$z_2 = z_1 + R\, sin\, \theta\, e^{i\phi}$$

$0 \leq \theta \leq \theta_*(y_1, R)$. (3.8) θ 的上界由

$$\theta_*(y_1, R) = \{\begin{matrix} \pi, & \text{if } R < y_1, \\ cos^{-1}(-\frac{y_1}{R}), & \text{if } R \geq y_1 \end{matrix}$$

(3.9) 给出，这来自于约束 $cos\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{R} \geq -\frac{y_1}{R}$。我们然后可以将三点振幅重写为

$$\tilde{A}(w_i, \overline{w}_i) = i2(2\pi)^4\lambda m^{-4}\int_0^\infty \frac{dy_1}{y_1^3}\int dz_1 d\overline{z}_1\int_0^\infty dRR^2\int_0^{\theta_s(y_1,R)} d\theta\, sin\,\theta\int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} G_{\Delta_i}(y_i, z_i, \overline{z}_i; w_i, \overline{w}_i) \frac{y_1}{((2\epsilon+1)y_1 + 2(1+\epsilon)R\ cos\ \theta)(y_1 + R\ cos\ \theta)^2}$$

$$\times\delta(\frac{2(1+\epsilon)}{(2\epsilon+1)y_1 + 2(1+\epsilon)R\ cos\ \theta})$$

, (3.10) 其中 $y_2, z_2, \overline{z}_2$ 和 $y_3, z_3, \overline{z}_3$ 已被(3.8)和(3.7)替换。δ 函数的支撑（即非零点）位于

$$R = \sqrt{\epsilon}\sqrt{2y_1^2 + \epsilon y_1^2 \cos^2\theta} + \epsilon y_1 cos\ \theta$$

. (3.11)

深度解读：

这几步是“枯燥的”数学计算，展示了作者如何“驯服”那个“怪物”积分(3.5)。

1. **(3.6) & (3.7)：** 他们利用 $\delta^{(4)}(...)$ 函数的“约束”，“解”出了粒子3的 H3 坐标 (y_3, z_3)。这“消灭”了对 (y_3, z_3) 的积分，代价是让剩下的 δ 函数变得更复杂（见(3.6)的第二行）。
2. **(3.8) & (3.9)：** 他们“切换”坐标系，从 (y_2, z_2) 切换到以粒子1 (y_1, z_1) 为中心的“球坐标” (R, θ, ϕ)。R 是粒子1和2在 H3 空间中的“距离”。
3. **(3.10)：** 这是用新坐标系 (R, θ, ϕ) 重写(3.6)的结果。它更丑了，但好处是 δ 函数内部现在显式地出现了 R 。
4. **(3.11)：** 这是“关键”。他们“解”了这个 δ 函数，发现它只在 R 取一个特定值时才“存活”。请看 R 的表达式：它正比于 $\sqrt{\epsilon}$。

到目前为止，我们还没有对三个粒子的质量 $2(1+\epsilon)m, m, m$ 取任何极限。 现在让我们考虑近极值极限 $\epsilon \to 0$。在这个极限下，三个动量 $m_i \hat{p}_i$ 变得共线，并且 H_3 中相应的点 $(y_i, z_i, \overline{z}_i)$ 变得重合。在 $\sqrt{\epsilon}$ 的领头阶， R 的解可以近似为

$$R = \sqrt{2\epsilon}y_1 + \mathrm{O}(\epsilon)$$

. (3.12) 在近极值极限下，我们有 $R \sim 0$，因此 H_3 中的三个体点 $y_i, z_i, \overline{z_i}$ 变得重合，如上所述。我们然后可以将三个体-边界传播子 G_{Δ_i} 移出 R, θ, ϕ-积分。 接下来，通过对 R 的简单幂次计数，我们发现共形主波函数的三点振幅在 $\epsilon = 0$ 时为零，这与边缘衰变过程的相空间消失有关。我们应该推进到近极值展开的次领头阶以获得非零答案，即^{9}

$$\widetilde{\mathrm{A}}(w_i, \overline{w_i}) = \frac{i(2\pi)^5\lambda}{m^4}\int_0^\infty \frac{dy_1}{y_1^3}\int dz_1 d\overline{z_1}\prod_{i=1}^3 G_{\Delta_i}(y_1, z_1, \overline{z}_1; w_i, \overline{w_i})$$

$$\times\frac{1}{y_1}\int_0^\infty dRR^2\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\ \delta(R^2 - 2\epsilon y_1^2) + \mathrm{O}(\epsilon)$$

$$= \frac{i2^{\frac{11}{2}}\pi^5\lambda}{m^4}\sqrt{\epsilon}(\int_0^\infty \frac{dy_1}{y_1^3}\int dz_1 d\overline{z}_1\prod_{i=1}^3 G_{\Delta_i}(y_1, z_1, \overline{z}_1; w_i, \overline{w_i})) + \mathrm{O}(\epsilon)$$

$$= \frac{i2^{\frac{9}{2}}\pi^6\lambda\Gamma(\frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-2}{2})\Gamma(\frac{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}{2})\Gamma(\frac{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}{2})\Gamma(\frac{-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}{2})\sqrt{\epsilon}}{m^4\Gamma(\Delta_1)\Gamma(\Delta_2)\Gamma(\Delta_3)|w_1-w_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|w_2-w_3|\cdots|w_3-w_1|\cdots}$$

(3.13) 其中倒数第二行括号中的项，正是 H_3 中的树图级三点威腾图，它在中被计算过。因此，近极值有质量三点振幅具有二维CFT中标量原初算符三点函数的形式，其共形维度为 Δ_i。

深度解读：

这就是“寻宝”的“高潮”！ 这是整篇论文的核心计算结果。

- **(3.12)的物理意义：**
  1. `ε→0` （近极值）的物理意义是：衰变几乎没有多余的能量。
  2. 数学上，(3.11)和(3.12)告诉我们， `R` （粒子1和2在动量空间的“距离”）正比于 `√ε` 。
  3. **结论：** 当 `ε→0` 时， `R→0` 。这意味着三个粒子的 `H3` 坐标（动量）“重合”到同一点。
- **(3.13)的计算步骤：**
  1. **第1步 (近似)**：因为三个点 `(yᵢ, zᵢ)` 几乎重合（ `R→0` ），作者可以把(3.10)中三个 `G_Δ(pᵢ, wᵢ)` 当作都在同一点 `p₁` ，并把它们“提”到积分 `∫dR...` 的外面。
  2. **第2步 (计算)**：剩下的 `∫dR...` 积分（ `R ~ √ε` ）是一个关于 `ε` 的积分。
  3. **第3步 (结果)**：计算结果见(3.13)的最后一行。
- **(3.13)的深刻洞察 (The Punchline):**
  - `√ε` ：振幅与 `√ε` 成正比。这意味着在“完美极值” `ε=0` 时，振幅为0（因为衰变被运动学禁止了，没有相空间）。
  - `|w₁-w₂|...` ：分母上的 `|w-w|...` 结构**完美地**匹配了(3.4)中由对称性决定的2D CFT形式！**（成功了！这就是我们要找的！）**

    - $\Gamma(...)$：分子上的 $\Gamma(...)$（伽马函数）是“惊喜”。(3.13)的**倒数第二行**显示，这个 $\Gamma(...)$ 串来自一个 $H3$ 上的积分（$\int dy_1 dz_1 ...$）。
    - **“威腾图”：** 这个积分 $\int_{H3} G_\Delta G_\Delta G_\Delta$ **正是**在AdS/CFT（全息）对应中计算“三点威腾图”(Witten Diagram)的标准结果！
- **最终结论：** 作者成功了。他们证明了，在一个（简化的）4D时空中的散射计算（左侧），最终**等价于**一个在3D双曲空间($H3$)中的“全息”计算（威腾图），而其**结果**（右侧）又**完美地**具有2D CFT关联函数的形式。
- **因果链：** 4D QFT (问题) $\xrightarrow{\text{近极值}}$ 4D 运动学 (简化) $\xrightarrow{\text{数学}}$ 3D H3 威腾图 (计算) $\xrightarrow{\text{积分}}$ 2D CFT 关联函数 (答案)。
- 这为“平直空间全息”提供了第一个具体的、可计算的证据。

^{9}注意到，在近极值极限 $\epsilon \to 0$ 下，角坐标 θ 的上界 $\theta_*(y_1, R)$ 在 δ 函数的支撑上变为 π。

致谢 我们感谢 T. Dumitrescu, P. Mitra, M. Pate, B. Schwab, D. Simmons-Duffin, 和 A. Zhiboedov 的有益对话。这项工作部分由NSF（美国国家科学基金会）资助 1205550 支持。S.P. 由NSF和Hertz基金会通过Harold and Ruth Newman奖学金支持。S.H.S. 由NSF资助 PHY-1606531 支持。

深度解读：

致谢是学术论文的“人情味”所在，它揭示了科学研究的“社会性”和“经济性”：

1. **“有益对话”：** 科学进步不是闭门造车。作者们感谢了他们的同事（Pate, Schwab, Zhiboedov等），这表明他们的“灵感”和“计算”是通过与他人不断的讨论、质疑和辩论才得以完善的。
2. **“经费支持”：** 作者提到了NSF（美国国家科学基金会）和Hertz基金会。这提醒我们，前沿的、纯粹的理论研究（思考时空的本质）是需要“资助”的。这些基金的支持使得学者们可以“仰望星空”，而不必担心“下一顿饭在哪”。

附录 A 克莱因-戈登内积

在本节中，我们计算了具有相同质量 m 和一般复数权重 $\Delta_{1,2}$ 的两个共形主解之间的克莱因-戈登内积。$SL(2, \mathbb{C})$ 意味着当 $\Delta_1 = \Delta_2^*$ 时，这个内积必须为零，而在 $\Delta_1 = \Delta_2^*$ 时，则预期出现某种 δ 函数。

深度解读：

这是在做“工具质检报告”（如目录解读中所述）。在量子力学中，“内积” (φ_1, φ_2) 是衡量两个波函数 φ_1 和 φ_2 “相似度”的工具。

- **“基底”的要求：** 为了让我们新发明的 φ 成为一个“合格的”粒子态基底（就像坐标系中的x, y, z轴），它们必须是“正交”的，即“互不相似”。

- “不相似”（$\Delta_1 = \Delta_2^*$）⇒ 内积 `(φ₁, φ₂) = 0`。
- “相似”（$\Delta_1 = \Delta_2^*$）⇒ 内积 `(φ₁, φ₂) ≠ 0` （归一化为 δ 函数）。

- **注意*号：** 为什么是 Δ_2^*（复共轭）而不是 Δ_2？这是量子力学（幺正性）的深刻要求。
- **附录A的目的：** “计算”它，看它是否符合量子力学的“安全标准”。

在 $X^0 = 0$ 切片上评估的两个出射波函数 $\phi^+_{\Delta_1,m}(X^\mu; w_1, \overline{w}_1)$ 和 $\phi^+_{\Delta_2,m}(X^\mu; w_2, \overline{w}_2)$ 之间的克莱因-戈登内积是

$$(\phi_1^+, \phi_2^+) = -i\int \ d^3X$$

$$= (2\pi)^3 m^{-2} (\prod_{i=1}^{2} \int_0^\infty \frac{dy_i}{y_i^3} \int \ dz_i d\overline{z}_i) G_{\Delta_1}(y_1, z_1, \overline{z}_1; w_1, \overline{w}_1) G^*_{\Delta 2}(y_2, z_2; \overline{z}_2; w_2, \overline{w}_2)$$

$$\times (\frac{1 + y_1^2 + |z_1|^2}{2y_1} + \frac{1 + y_2^2 + |z_2|^2}{2y_2}) \delta^{(2)} (\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_2}{y_2}) \delta (\frac{1 - y_1^2 - |z_1|^2}{2y_1} - \frac{1 - y_2^2 - |z_2|^2}{2y_2})$$

$$= 2(2\pi)^3 m^{-2} \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \int \ dz d\overline{z} G_{\Delta_1}(y, z, \overline{z}; w_1, \overline{w}_1) G^*_{\Delta_2}(y, z, \overline{z}; w_2, \overline{w}_2)$$

. (A.1)

深度解读：

- **(A.1)第一行：** 这是“克莱因-戈登内积”的标准定义（一个在 `t=0` 时刻的空间积分 `∫d³X`）。
- **(A.1)第二行：** 这是将(2.10)（积分表示法）代入定义后的“怪物”——一个双重 `H3` 积分，被 `δ` 函数约束。
- **(A.1)第三行：** **奇迹再次发生！** `δ` 函数“杀死”了其中一个 `H3` 积分，使得这个4D时空的内积(A.1第一行) **再次**简化为了一个 H_3 空间（动量空间）上的**单重**积分！
- **结论：** 这个 H_3 空间（即单位动量空间）显然是这些“共形波函数”的“自然家园”。

使用费曼技巧(Feynman trick)，

$$\frac{1}{A^a B^b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1}}{(\alpha A + (1-\alpha)B)^{a+b}}$$

(A.2) 我们可以执行 $y, z, \overline{z}$ 的积分来获得

$$(\phi_1^+,\phi_2^+)=2(2\pi)^3m^{-2}\frac{\pi\Gamma(\frac{\Delta_1+\Delta_2^*-2}{2})\Gamma(\frac{\Delta_1+\Delta_2^*}{2})}{2\Gamma(\Delta_1)\Gamma(\Delta_2^*)|w_1-w_2|^{\Delta_1+\Delta_2^*}}\int_0^1 d\alpha\alpha^{\frac{\Delta_1-\Delta_2^*}{2}-1}(1-\alpha)^{\frac{-\Delta_1+\Delta_2^*}{2}-1}$$

(A.3) 这里 Δ_2^* 是 Δ_2 的复共轭。如果我们令 $\eta=\frac{\Delta_1-\Delta_2^*}{2},\alpha=\frac{e^u}{e^u+e^{-u}}$

$$\int_0^1 d\alpha\alpha^{\eta-1}(1-\alpha)^{-\eta-1}=2\int_{-\infty}^{\infty}due^{2u\eta}.$$

(A.4) 如果 η 是实数，这个积分是发散的；如果 $\eta=i\lambda$ 是纯虚数，它等于 $2\pi\delta(\lambda)$。

深度解读：

- **(A.2)：** “费曼技巧”，一个用于合并分母的数学工具，物理系学生的“必备技能”。
- **(A.3)：** 使用(A.2)并积分 `y` 和 `z` 后的结果。它留下了一个最后的 `α` 积分（`∫dα...`）。
- **(A.4)：** **关键洞察！** 这个 `α` 积分(A.4)是“发散”的（积分为无穷大），**除非**指数 `η` 是“纯虚数”！
- `η` **是什么？** (A.3)中定义了 `η = (Δ₁ - Δ₂*)/2`。
- **后果：** 为了让我们的“质检”通过（即内积不为无穷大），我们**必须**要求 `η` 是纯虚数。

因此，为了有一个 δ 函数归一化的内积，我们要求 Δ_i 为具有相同实部的复数，$\Delta_1=a+i\lambda_1$，$\Delta_2=a+i\lambda_2$ $(a,\lambda_i\in\mathrm{R})$。具有复数共形维度、相同质量的共形主波函数的克莱因-戈登内积是，

$$(\phi_1^+,\phi_2^+)=64\pi^5m^{-2}\frac{1}{(\Delta_1+\Delta_2^*-2)|w_1-w_2|^{\Delta_1+\Delta_2^*}}\delta(\lambda_1+\lambda_2).$$

(A.5)

深度解读：

这是“质检报告”的“结论”，也是本文的第二个主要成果。

1. **约束：** 为了让(A.4)不发散（即 `η` 为纯虚数），我们必须要求 `Re(η) = 0`。
2. `Re(η) = Re( (Δ₁ - Δ₂*)/2 ) = 0`。
3. **推论：** 这**迫使**我们必须假设 `Δ` 是一个**复数**！
4. **假设：** $\Delta_1=a+i\lambda_1$ 且 $\Delta_2=a+i\lambda_2$（`a` 是相同的实部，`λ` 是虚部）。
5. **验证：** * $\Delta_2^*=a-i\lambda_2$ * $\eta=\frac{(a+i\lambda_1)-(a-i\lambda_2)}{2}=\frac{i(\lambda_1+\lambda_2)}{2}$ * `η` 确实是“纯虚数”！
6. **计算：** 将这个 `η` 代入(A.4)，积分 `∫e^{2uη}du` 变为 `∫e^{iu(λ₁+λ₂)}du`，这正是 $\delta(\lambda_1+\lambda_2)$ 的定义！

7. **最终内积(A.5)：** 计算成功！它确实是作者预期的 δ 函数形式。

- **深刻的物理含义：** 这份“质检报告”对我们的理论施加了一个“惊人的”约束：**共形维度 Δ 必须是复数**，形式为 $\Delta = a + i\lambda$ ，其中 a 是固定的，而 λ 是一个**连续的**实数。
- **“奇异的”CFT：** 这“证明”了：如果4D散射振幅真的对偶于一个2D CFT，那么这个CFT必须是一个“奇异的”CFT，其算符具有“连续的”和“复数的”维度。
- **总结：** 本文不仅提出了一个“猜想”（引言），构造了“工具”（第2节），验证了“猜想”（第3节），而且还“推导出”了那个对偶2D CFT必须具有的“奇异性质”（附录A）。

参考文献

P. A. M. Dirac, "Wave equations in conformal space," Annals Math. 37 (1936) 429-442. J. de Boer and S. N. Solodukhin, "A Holographic reduction of Minkowski space-time," Nucl. Phys. B665 (2003) 545-593, hep-th/0303006. T. Banks, "A Critique of pure string theory: Heterodox opinions of diverse dimensions," hep-th/0306074. G. Barnich and C. Troessaert, "Symmetries of asymptotically flat 4 dimensional spacetimes at null infinity revisited," Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 111103, 0909.2617. G. Barnich and C. Troessaert, "Supertranslations call for superrotations," PoS (2010) 010, 1102.4632.. D. Kapec, V. Lysov, S. Pasterski, and A. Strominger, "Semiclassical Virasoro symmetry of the quantum gravity S-matrix," JHEP 08 (2014) 058, 1406.3312. D. Kapec, P. Mitra, A.-M. Raclariu, and A. Strominger, "A 2D Stress Tensor for 4D Gravity," 1609.00282. C. Cheung, A. de la Fuente, and R. Sundrum, "4D Scattering Amplitudes and Asymptotic Symmetries from 2D CFT," 1609.00732. S. He, Y.-t. Huang, and C. Wen, "Loop Corrections to Soft Theorems in Gauge Theories and Gravity," JHEP 12 (2014) 115, 1405.1410. M. Bianchi, S. He, Y.-t. Huang, and C. Wen, "More on Soft Theorems: Trees, Loops and Strings," Phys. Rev. D92 (2015), no. 6, 065022, 1406.5155. Z. Bern, S. Davies, and J. Nohle, "On Loop Corrections to Subleading Soft Behavior of Gluons and Gravitons," Phys. Rev. D90 (2014), no. 8, 085015, 1405.1015. Z. Bern, S. Davies, P. Di Vecchia, and J. Nohle, "Low-Energy Behavior of Gluons and Gravitons from Gauge Invariance," Phys. Rev. D90 (2014), no. 8, 084035, 1406.6987. S. W. Hawking, M. J. Perry, and A. Strominger, "Superrotation Charge and Supertranslation Hair on Black Holes," 1611.09175. T. He, D. Kapec, A.-M. Raclariu, and A. Strominger, "Loop-Corrected Virasoro Symmetry of 4D Quantum Gravity," to appear. F. Cachazo and A. Strominger, "Evidence for a New Soft Graviton Theorem," 1404.4091. A. Strominger, "Asymptotic Symmetries of Yang-Mills Theory," JHEP 07 (2014) 151, 1308.0589. T. He, P. Mitra, and A. Strominger, "2D Kac-Moody Symmetry of 4D Yang-Mills Theory," JHEP 10 (2016) 137, 1503.02663. A. Ashtekar and J. D. Romano, "Spatial infinity as a boundary of space-time," Class. Quant. Grav. 9 (1992) 1069-1100. M. Campiglia and A. Laddha, "Asymptotic symmetries of QED and Weinberg's soft photon theorem," JHEP 07 (2015) 115, 1505.05346. M. Campiglia and A. Laddha, "Asymptotic symmetries of gravity and soft theorems for massive particles," JHEP 12 (2015) 094, 1509.01406. M. Campiglia, "Null to time-like infinity Green's functions for asymptotic symmetries in Minkowski spacetime," JHEP 11 (2015) 160, 1509.01408. L. Cornalba, M. S. Costa, and J. Penedones, "Deep Inelastic Scattering in Conformal QCD," JHEP 03 (2010) 133, 0911.0043. S. Weinberg, "Six-dimensional Methods for Four-dimensional Conformal Field Theories," Phys. Rev. D82 (2010) 045031, 1006.3480. M. S. Costa, J. Penedones, D. Poland, and S. Rychkov, "Spinning Conformal Correlators," JHEP 11 (2011) 071, 1107.3554. M. S. Costa, J. Penedones, D. Poland, and S. Rychkov, "Spinning Conformal Blocks," JHEP 11 (2011) 154, 1109.6321. D. Simmons-Duffin, "Projectors, Shadows, and Conformal Blocks," JHEP 04 (2014) 146, 1204.3894. E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 253-291, hep-th/9802150. D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, and L. Rastelli, "Correlation functions in the CFT(d) / AdS(d+1) correspondence," Nucl. Phys. B546 (1999) 96-118, hep-th/9804058.

深度解读：参考文献——“巨人的肩膀”

参考文献列表是“学术的传承”。它告诉我们这篇论文是如何“站在巨人的肩膀上”的。我们可以把它们分为几类：

- ** P. A. M. Dirac (1936)：**
    - **“历史的灵感”**。物理学大师狄拉克在80年前就发现了 `SL(2,C)` 和共形群的数学联系。
- ** J. de Boer & S. N. Solodukhin (2003); E. Witten (1998); D. Z. Freedman et al. (1999)：**
    - **“全息工具箱”**。这些是关于AdS/CFT（即弯曲空间中的全息）的奠基性论文。
    - 试图将AdS全息的思想应用于“平直空间”。
    - (来自威腾，弦论的领军人物) 和 (弗里德曼) 提供了计算“威腾图”和“CFT关联函数”的“菜谱”。**本文的(3.13)就明确引用了的计算结果！**
- **[4-8], [13-17] (Barnich, Troessaert, Kapec, Lysov, Pasterski, Strominger, Cachazo, He,...)**
    - **“新的动机（渐近对称性）”**。这是本文的“直接背景”，其中许多作者（Pasterski, Strominger）就是本文的作者！
    - **Strominger**（本文的作者之一）和他的合作者们在2010年代发起了一场“革命”，发现时空“无穷远处”的对称性（特别是引力和规范场论）比我们想象的要丰富得多（例如中的“超平移”和“超旋转”，中的Virasoro群，中的Kac-Moody对称性）。
    - (Cachazo & Strominger) 是关键，它将这些“对称性”与“软引力子定理”（一种可观测的散射效应）联系起来。
- **[22-26] (Costa, Penedones, Poland, Rychkov, Simmons-Duffin)**：
    - **“CFT技术”**。这些是关于“共形场论”的现代技术（如“共形自举”和“共形块”）的论文。作者们“借用”了这些技术来理解他们的4D结果。
- **总结：** 本文是一次“漂亮的融合”。它使用了来自**AdS/CFT**的“工具”（, 的威腾图），去解决一个由**渐近对称性**和**软定理**提出的“新问题”（的4D散射的全息对偶），而这个问题的“灵感”则来自80年前的**狄拉克**。