穿越维度的挑战：鲁珀特之问与"不可穿越体"的诞生

第一部分：引言 —— 一场跨越三百年的皇家赌局

想象一下，你手中握着两枚大小完全相同的骰子。现在，一个看似荒谬的问题摆在你面前：你是否有可能在一枚骰子里钻出一个隧道，让另一枚骰子毫发无损地穿过去？

大多数人的第一反应或许是"绝无可能！"。这种直觉是如此强烈，以至于在17世纪晚期，一位身份不详的绅士就此与莱茵河的鲁珀特亲王（Prince Rupert of the Rhine）设下了一场赌局。鲁珀特亲王是英王查理一世的侄子，曾在英国内战中指挥保皇党军队。然而，在他的晚年，这位昔日的军事家将热情投入到了温莎城堡的实验室中，潜心研究冶金和玻璃制造技术。他不仅是一位王子，更是一位热衷于科学探索的"绅士科学家"。

最终，鲁珀特亲王赢得了这场赌局。数学家约翰·沃利斯（John Wallis）在1693年记述这个故事时，并未说明亲王是给出了严谨的数学证明，还是真的在现实中钻出了一个洞。但沃利斯本人通过数学方法证明了：如果沿着立方体的一条内对角线方向钻孔，隧道的宽度足以让另一个同样大小的立方体通过。这是一个惊人的、反直觉的结论，它揭示了三维空间中隐藏的几何奥秘，也开启了一场持续三百多年的智力探索。

这个最初源于皇家赌局的趣题，很快从一个简单的"是否可能"的问题，演变成了一个更深刻、更具普遍性的数学命题："是否所有外形饱满、没有凹陷的几何体（即凸多面体）都具备这种可以'自我穿越'的性质？"这个问题，后来被称为"鲁珀特性质"（Rupert property）。在接下来的几个世纪里，数学家们发现，不仅是立方体，几乎所有他们能想到的著名凸多面体——从古希腊人就已熟知的四面体、八面体，到构成足球形状的截角二十面体——都拥有这一神奇的性质。

成功的案例越来越多，一个大胆的猜想也随之浮出水面：或许，鲁珀特性质是所有凸多面体的"天赋属性"。然而，在数学的殿堂里，猜想必须经过最严苛的检验。证明一个猜想需要无穷的智慧，而推翻它，有时只需要一个反例。在长达数百年的时间里，无人能找到这样一个"顽固"的形状，它拒绝任何形式的隧道让自己的同类穿过。直到最近，借助现代数学理论与强大的计算机算力，这个跨越三百年的几何悬案终于迎来了突破性的结局。

本报告将完整翻译并深度解读《Quanta Magazine》于2025年10月24日发表的专题文章——《第一个无法穿越自身的形状被发现》。我们将跟随文章的脉络，逐段剖析这个古老问题的现代解法，见证第一个被证明不具备鲁珀特性质的几何体——"不可穿越体"（Noperthedron）的诞生。这不仅是一个几何问题的终结，更是一次展示现代数学如何融合理论洞察与计算能力，去探索和拓展人类认知疆界的壮丽旅程。

第二部分：核心解读 —— 《第一个无法穿越自身的形状被发现》全文翻译与逐段精解

章节 2.1: 鲁珀特亲王的立方体

原文翻译

第一个无法穿越自身的形状被发现
经过三个多世纪，一个源于皇家赌局的几何问题终获解决。
作者：Erica Klarreich，2025年10月24日

引言

想象一下，你正拿着两颗大小相同的骰子。有没有可能在一颗骰子上钻出一个足够大的隧道，让另一颗骰子滑过去?

或许你的直觉会告诉你"肯定不行！"。如果是这样，你并不孤单。在17世纪晚期，一位身份不明的人就此事与莱茵河的鲁珀特亲王打了个赌。

鲁珀特——英格兰国王查理一世的侄子，曾在英国内战中指挥保皇党军队——在他的晚年，于温莎城堡的实验室里研究冶金和玻璃制造。

鲁珀特赢了这场赌局。数学家约翰·沃利斯在1693年记述这个故事时，没有说明鲁珀特是写了一份证明，还是真的在一个立方体上钻了个洞。但沃利斯本人用数学方法证明了，如果你沿着立方体的一条内对角线方向钻一个直隧道，这个隧道可以做得足够宽，让另一个立方体通过。这是一个非常紧凑的穿越：如果你让第二个立方体增大仅仅4%，它就再也无法通过了。

人们很自然地会好奇，还有哪些其他形状也具备这个性质。"我认为这个问题相当经典，"谷歌的软件工程师汤姆·墨菲（Tom Murphy）说道，他在业余时间广泛地探索了这个问题。"它肯定会被反复发现……外星人也可能会想到这个问题。"

专业生动的解读

这段引言为我们拉开了一场跨越时空的智力竞赛的序幕。它不仅仅是在讲述一个数学趣闻，更是在铺陈一个核心思想的演进过程——从一个具体的、带有表演性质的赌局，到一个抽象的、具有普适性的几何学问题。

首先，让我们为历史人物进行一次"画像重构"。鲁珀特亲王并非只是一个养尊处优的皇室成员，他晚年投身科学研究，体现了那个时代（科学革命时期）贵族阶层对新兴科学的浓厚兴趣。而约翰·沃利斯则是与牛顿、莱布尼茨同时代的顶尖数学家，是微积分发展的先驱之一。他将鲁珀特的赌局问题形式化，标志着这个问题从一个工匠的挑战，正式转变为一个需要逻辑和推理来解决的数学命题。

那么，沃利斯是如何证明这个看似不可能的任务的呢？他运用了一种在几何学乃至整个科学领域都至关重要的思想工具——**投影（Projection）**。这本质上是一种"降维打击"的策略：将一个复杂的三维穿

越问题，转化为一个相对简单的二维平面问题来分析。想象一下，太阳光从正上方垂直照射，一个物体在地上的影子就是它的二维正交投影。一个物体能否穿过一个隧道，关键取决于这个物体的最宽"截面"能否通过隧道的"瓶颈"处。通过投影，我们可以直观地比较这两个关键的二维形状。

具体到立方体问题，其精妙之处在于，同一个立方体从不同角度观察，其"影子"的形状和大小是不同的。

- 当立方体平放时，它的投影是一个**正方形**。这可以看作是那个需要通过隧道的"钉子"（Passing Cube）。
- 当立方体的一个角尖朝上，沿着连接对角顶点的"体对角线"方向观察时，它的投影变成了一个**正六边形**。这可以看作是被钻孔的立方体上开出的"洞口"（Tunneled Cube）。

现在，三维的穿越问题就变成了：那个正方形的"钉子"能塞进这个正六边形的"洞口"里吗？答案就在下面的数据分析中。

表格 1: 立方体穿越之谜的几何解析

角色 (Role)	**摆放朝向 (Orientation)**	**二维投影形状 (2D Projection Shape)**	**关键尺寸 (Key Dimension)**	**数学计算 (假设边长为1)**	**结论 (Co**
待穿越的立方体 (Passing Cube - "Peg")	标准放置 (Standard)	正方形 (Square)	对角线长度 (Diagonal Length)	$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\approx 1.414$	这是"钉子
被钻孔的立方体 (Tunneled Cube - "Hole")	沿体对角线竖立 (On a corner)	正六边形 (Regular Hexagon)	对边距离 (Width)	$\sqrt{2}\approx 1.414$	这是"洞口
对比分析 (Analysis)	-	-	-	-	正方形的 这意味着 只需稍微 就能产生

沃利斯的证明虽然巧妙，但并非最优解。大约一个世纪后，荷兰数学家皮特·尼乌兰德（Pieter Nieuwland）发现，如果选择一个更刁钻的角度来钻孔，所形成的"洞口"可以更大。他的计算表明，我们甚至可以让一个边长比原来大6%的立方体穿过！其最大允许边长为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}\approx 1.06066$。这引出了数学思维中一个重要的层次区别：证明"**存在性**"（某件事是可能的）和追求"**最优性**"（找到最佳方案）是两个不同难度的问题。鲁珀特亲王的立方体问题，从它被提出的那一刻起，就为后世的数学家们同时开启了这两扇大门。

原文翻译

穿越阴影

要理解一个立方体如何穿过另一个，想象一下你把一个立方体举到桌子上方，并观察它的影子（假设光从正上方照射）。如果你以标准位置拿着立方体，影子是一个正方形。但如果你让其中一个角尖直指上方，影子则是一个正六边形。

1693年，沃利斯证明了那个正方形的影子可以放进六边形内部，且留有微小的余量。这意味着，如果你将一个立方体的角尖朝上，你就可以钻出一个垂直的隧道，其大小足以让第二个立方体通过。

大约一个世纪后，皮特·尼乌兰德证明了，一个不同的朝向能投射出更好的影子——这个影子甚至可以容纳一个比带隧道的立方体大6%以上的立方体。

专业生动的解读

这一部分用"穿越阴影"这个形象的比喻，再次强调了"投影法"是解决鲁珀特问题的核心钥匙。这个方法之所以强大，是因为它将一个关于体积、空间和运动的复杂三维问题，简化为了一个关于面积、形状和包含关系的二维问题，这使得数学分析变得可行。

这个过程可以类比于医生通过X光片来诊断骨骼问题。医生无法直接"进入"病人体内观察，但他可以通过X光片（一种二维投影）来分析三维骨骼的结构和状态。同样，数学家无法穷尽所有三维空间中的运动轨迹，但他们可以通过分析不同角度下的二维投影（影子）来判断穿越是否可能。

沃利斯发现的"正方形影子"与"六边形影子"的关系，是这个问题的第一个理论突破。它证明了"穿越"是可能存在的。然而，尼乌兰德的发现则将问题推向了极致。他没有局限于沿着立方体最对称的体对角线去思考，而是探索了其他"非对称"的方向。这告诉我们，在解决问题时，最优解有时隐藏在那些看起来不那么"标准"或"完美"的地方。

这个从"存在"到"最优"的飞跃，在科学和工程领域中无处不在。例如，工程师设计桥梁，首先要确保它能承重（存在性），然后会不断优化设计，用最少的材料达到最大的强度（最优性）。尼乌兰德的成就，相当于找到了在立方体上"开洞"的最优设计方案，使得"通航能力"达到了理论上的最大值。这个最优解不仅是一个数字上的提升，更代表了对问题几何本质更深刻的理解。

原文翻译

要处理的形状种类繁多，难以把握，因此数学家们倾向于关注**凸多面体**：像立方体一样，拥有平坦的面且没有突出或凹陷的形状。当这类形状在某些方向上比其他方向宽得多时，通常很容易找到一个直隧道，让该形状的另一个复制品通过。但许多著名的凸多面体——例如十二面体，或者构成足球形状的截角二十面体——都是高度对称的，难以分析。

在这些形状中，"几百年来我们只知道立方体（有此性质）"，奥地利联邦统计组织"奥地利统计局"的数学家雅各布·施泰宁格（Jakob Steininger）说。

然后，在1968年，克里斯托夫·斯克里巴（Christoph Scriba）证明了四面体和八面体也具有现在数学家们所称的"鲁珀特性质"。而在过去十年的集中研究中，专业数学家和业余爱好者们已经为许多研究最广泛的凸多面体找到了鲁珀特隧道，包括十二面体、二十面体和足球。

鲁珀特性质似乎非常普遍，以至于数学家们推测出一条通用法则：**每个凸多面体都具有鲁珀特性质。** 没有人能找到一个不具备此性质的——直到现在。

专业生动的解读

随着立方体问题的解决，数学家们的目光自然投向了更广阔的几何世界。然而，三维形状的"动物园"种类繁多、形态各异，为了让问题能够被系统地研究，必须设定一个清晰的研究范围。这就是"**凸多面体**"（Convex Polyhedron）这一概念被引入的原因。

"多面体"指的是由平坦的多边形（面）围成的三维实体。而"凸"则是一个关键的限定词，它意味着这个几何体是"饱满"的，没有任何凹陷。一个直观的判断方法是：在几何体内部任意选择两点，连接它们的线段必须完全位于几何体内部。我们日常生活中见到的大多数物体，如积木、水晶、未被啃过的苹果，都可以近似看作凸体。这个限定排除了那些带有"洞"或"凹坑"的复杂形状，使得问题聚焦于最基本的几何形态。

在凸多面体的大家族中，最引人注目的是那些高度对称的成员。对称性在数学和物理学中意味着一种深刻的内在秩序和美感，但在这里，它却成了分析的难点。对于一个细长的物体，比如铅笔盒，我们很容易想象沿着它的长轴方向打一个洞，让另一个铅笔盒穿过。但对于像球一样"圆滚滚"的十二面体，所有方向看起来都差不多，直觉很难判断是否存在一个足够大的投影"洞口"。

正是在这些高度对称的"硬骨头"上，数学家们不断取得进展。1968年，斯克里巴证明了最简单的两个柏拉图立体——四面体和八面体——具有鲁珀特性质。这打破了立方体长达近三百年的"垄断"地位。进入21世纪，随着计算机算力的增强，更多的"明星成员"被攻克，包括剩下的柏拉图立体（十二面体和二十面体）和由它们衍生出的阿基米德立体（如足球）。

下面的表格整理了这场探索中涉及的一些关键几何体，可以看作是这场几何"寻宝游戏"的参与者档案。

表格 2: 几何"动物园"成员档案

名称 (Name)	家族 (Family)	面 (F)	顶点 (V)	棱 (E)	面形状 (Face Types)	鲁珀特性质 (Rupert Status)
四面体 (Tetrahedron)	柏拉图立体 (Platonic)	4	4	6	三角形	是 (Yes)
立方体 (Cube)	柏拉图立体 (Platonic)	6	8	12	正方形	是 (Yes)
八面体 (Octahedron)	柏拉图立体 (Platonic)	8	6	12	三角形	是 (Yes)

名称 (Name)	家族 (Family)	面 (F)	顶点 (V)	棱 (E)	面形状 (Face Types)	鲁珀特性质 (Rupert Status)
十二面体 (Dodecahedron)	柏拉图立体 (Platonic)	12	20	30	五边形	是 (Yes)
二十面体 (Icosahedron)	柏拉图立体 (Platonic)	20	12	30	三角形	是 (Yes)
三角化四面体 (Triakis Tetrahedron)	卡塔兰立体 (Catalan)	12	8	18	等腰三角形	是 (Yes - 极限情况)
斜方截半二十面体 (Rhombicosidodecahedron)	阿基米德立体 (Archimedean)	62	60	120	三角形, 正方形, 五边形	曾被猜想为 (Conjectur No)
不可穿越体 (Noperthedron)	**新发现 (Newly Constructed)**	**152**	**90**	**240**	**三角形, 十五边形**	**证明为"否" (Proven N**

当所有已知的、重要的凸多面体都被证明具有鲁珀特性质时，数学家们进行了一次大胆的"归纳跳跃"。他们提出了一个影响深远的猜想：**所有凸多面体都具有鲁珀特性质**。这体现了科学研究中一种常见的思维模式：从大量的特例中总结出普遍规律。然而，数学的魅力和严苛之处在于，一个猜想在被严格证明之前，永远只是一个"有根据的猜测"。无论你验证了多少个例子，只要未能覆盖所有可能，它就可能被下一个出现的、意想不到的反例所推翻。而这篇文章的主角，正是那个酝酿已久、即将登场的"反例"。

章节 2.2: 从特例到猜想

原文翻译

"不可穿越体"（The Noperthedron）。迄今为止，这是唯一被证明不具有鲁珀特性质的形状。

在一篇于八月份在线发布的论文中，施泰宁格和谢尔盖·尤尔科维奇（A&R Tech公司，一家奥地利交通系统公司的研究员）描述了一个拥有90个顶点和152个面的形状，他们将其命名为"不可穿越体"（Noperthedron）（名字来源于墨菲创造的"Nopert"一词，结合了"Rupert"和"nope"）。施泰宁格和尤尔科维奇证明了，无论你如何在一个"不可穿越体"上钻一个直隧道，第二个"不可穿越体"都无法穿过。

这个证明需要理论上的突破和大规模的计算机计算相结合，并依赖于"不可穿越体"顶点的一个精妙性质。"它能成功，简直是个奇迹，"施泰宁格说。

专业生动的解读

这一部分直接揭晓了谜底，宣告了那个流传已久的猜想的终结。主角"Noperthedron"正式登场，它的名字本身就极具趣味性，是"Rupert"（鲁珀特）和"Nope"（不行）的结合体，直白地宣告了它的"不可穿越"属性。

这个发现的重大意义在于，它为凸多面体的世界划定了一条新的边界。在此之前，鲁珀特性质被认为可能是一个普遍存在的"福利"，现在我们知道，这个"福利"是有条件的，存在着一个"禁区"。"不可穿越体"就是第一个被发现并被严格证明生活在这个"禁区"内的居民。

更重要的是，这个证明过程本身，集中体现了现代数学研究的范式转变。它不再是像沃利斯那样，仅凭一支笔、一张纸和天才的几何直觉就能完成的。这个证明是一个复杂的系统工程，它依赖于两个关键支柱：

1. **理论创新**：研究者们必须发展出新的数学工具和定理，这些工具能够将一个涉及无限可能性的问题，转化为一个有限的、可操作的框架。
2. **海量计算**：在理论框架搭建好之后，需要借助计算机强大的算力，去执行那些人力无法完成的、枯燥但至关重要的验证工作。

施泰宁格所说的"奇迹"，可能包含两层含义。其一，是理论工具的精妙。他们发展的理论必须足够强大，能够处理所有可能的情况而没有漏洞。其二，是结果的偶然性。他们构造出的"不可穿越体"的顶点排布必须恰到好处，才能满足理论工具的要求，最终让证明得以完成。这就像是打造了一把结构异常复杂的"钥匙"，而"不可穿越体"就是那把与之完美匹配的"锁"。任何一环的微小偏差，都可能导致整个证明的失败。这个"奇迹"的背后，是数学家们深邃的洞察力、严谨的逻辑构建和不懈的探索精神。

原文翻译

随后的所有对更复杂形状的分析，都依赖于这个过程：将形状向不同方向转动，并寻找一个可以被另一个影子包含的影子。在计算机的帮助下，数学家们为各种各样的形状找到了鲁珀特通道。有些通道的通过过程极其惊险——例如，"三角化四面体"（triakis tetrahedron）中的通道，其间隙仅约为该形状半径的0.000002倍。"计算与离散几何相结合的世界已经开花结果，使得这类计算成为可能，"史密斯学院的名誉教授约瑟夫·奥罗克（Joseph O'Rourke）说。

编写算法寻找鲁珀特通道的研究人员注意到一个奇怪的二分现象：对于任何给定的凸多面体，算法似乎要么几乎立刻就找到一个通道，要么就完全找不到。

在过去五年中，数学家们积累了一小批未能找到通道的"顽固"形状。"我曾让我的台式机为'斜方截半二十面体'（rhombicosidodecahedron）连续计算了两周，"约翰·霍普金斯大学的应用数学家本杰明·格里默（Benjamin Grimmer）说，他指的是一个由62个正三角形、正方形和五边形构成的立体。"那一个似乎能抵抗任何尝试。"

专业生动的解读

这一部分深入探讨了寻找鲁珀特通道的现代方法，并揭示了研究过程中一个耐人寻味的现象，正是这个现象，暗示了"不可穿越体"的存在。

核心方法依然是"影子戏法"——即比较不同方向的二维投影。但对于十二面体、二十面体这类复杂形状，其投影的轮廓不再是简单的正六边形，而是复杂多样的多边形。用手计算这些投影的精确边界并进行比较，几乎是不可能的任务。因此，**计算机**成为了现代几何学家的"超级算盘"和"虚拟实验室"。通过编程，计算机可以快速地模拟成千上万个不同方向的投影，并精确计算它们之间的包含关系。

计算机的介入不仅提升了效率，还带来了一个惊人的发现：**三角化四面体**（Triakis Tetrahedron）的鲁珀特通道。这是一个由12个等腰三角形面构成的几何体，它虽然能"自我穿越"，但其过程是"极限贴合"的，间隙小到只有半径的百万分之二。这个例子生动地说明了鲁珀特通道可以有多么隐蔽和难以发现，也从侧面印证了如果没有计算机的精确计算，许多这类问题可能永远无法得到解答。

更关键的是，研究者们在用算法"狩猎"鲁珀特通道时，发现了一个"非黑即白"的奇特现象：算法对于一个多面体，要么在短时间内就"轻松"找到通道，要么就是长时间"一无所获"。这很不寻常。通常在复杂的搜索问题中，我们会预期存在一个难度梯度，有些问题容易，有些中等，有些困难。但在这里，似乎只有"容易"和"不可能"两种状态。

这种"二分现象"让数学家们开始怀疑：那些让计算机"束手无策"的顽固分子，比如由20个三角形、30个正方形和12个五边形构成的**斜方截半二十面体**（Rhombicosidodecahedron），可能并非因为它们的通道过于隐蔽，而是因为它们根本就没有通道。格里默让计算机运行两周的徒劳尝试，就像是在一个没有出口的迷宫里寻找出口，无论走多久、多努力，结果都是一样的。

然而，这种"找不到"的经验证据，在数学上是无力的。因为你永远无法确定是不是因为你的算法不够好，或者计算时间不够长。要证明一个形状"不可穿越"，就必须从理论上排除**所有**无限多种可能性。这正是从"怀疑"到"证明"之间最艰难的一步，也是下一部分将要解决的核心挑战。

原文翻译

斜方截半二十面体是一个主要的"Nopert"（不可穿越）候选者。但这种抵抗并不能证明一个形状就是"Nopert"。一个形状有无限多种朝向，而计算机只能检查有限多种。研究人员不知道这些顽固分子是真正的"Nopert"，还是仅仅其鲁珀特通道难以找到。

他们所知道的是，候选的"Nopert"极其罕见。从去年开始，墨菲开始构建数亿个形状。这些形状包括随机多面体、顶点位于球面上的多面体、具有特殊对称性的多面体，以及他通过移动一个顶点来故意破坏先前鲁珀特通道的多面体。他的算法几乎为每一个形状都轻松地找到了鲁珀特通道。

这些快速得到的结果与"Nopert"顽固分子们的固执形成了鲜明对比，使得一些数学家怀疑真正的"Nopert"确实存在。但直到八月，他们所拥有的都只是怀疑。

专业生动的解读

这一段深刻地揭示了证明一个否定性命题（即"不存在某种东西"）的巨大困难。当我们要证明一个形状**具有**鲁珀特性质时，任务相对"简单"：只需要找到**一个**可行的通道即可，这就像在房间里找钥匙，找到了就成功了。但要证明一个形状**不具有**鲁珀特性质，则必须证明在**所有**可能的方向上，**都**不存在这样的通道。这相当于要证明房间里**没有**钥匙，你必须搜遍每一个角落、每一个抽屉，确保无一遗漏，才能下此结论。

对于一个有无限多种朝向的几何体来说，这似乎是一个不可能完成的任务。计算机虽然快，但它只能进行有限次的尝试。检查一亿次、一万亿次，都无法从逻辑上排除第一万亿零一次尝试会成功的可能性。这就是为什么仅凭斜方截半二十面体"抵抗"计算机搜索，并不能构成一个数学证明。

为了更系统地探索这个问题，软件工程师汤姆·墨菲进行了一项规模宏大的"人口普查"实验。他没有盯着少数几个复杂的"嫌疑犯"，而是反其道而行之，用算法生成了数以亿计的、各式各样的凸多面体。这些多面体形态各异，有的完全随机，有的具有特定结构。结果令人震惊：他的算法几乎为所有这些"普通"多面体都轻而易举地找到了鲁珀特通道。

这个实验的结果，就像是在一片广袤的沙漠中寻找一种特殊的石头。如果你随机捡起数亿块石头，发现它们全都是普通的沙岩，而只有极少数几块你早就盯上的石头是坚硬的花岗岩，你就会越来越相信，花岗岩确实是一种与众不同的、稀有的存在。同样，墨菲的实验极大地增强了数学界的信心：那些"顽固分子"的特殊性并非偶然，它们很可能真的构成了一个新的物种——"Nopert"（不可穿越体）。

尽管如此，强烈的"怀疑"和实验证据依然不等于数学上的"确定性"。在严格的数学世界里，从"几乎所有"到"所有"，以及从"似乎没有"到"绝对没有"，其间都隔着一道名为"证明"的鸿沟。在施泰宁格和尤尔科维奇的工作发表之前，整个数学界都站在这道鸿沟的一边，手握大量线索，却无法迈出决定性的一步。

章节 2.3: 现代数学的"搜捕"：参数空间与两大定理

原文翻译

没有通道

现年30岁的施泰宁格和29岁的尤尔科维奇，从青少年时期一同参加数学奥林匹克竞赛起就是朋友。尽管两人最终都离开了学术界（尤尔科维奇在获得博士学位后，施泰宁格在获得硕士学位后），但他们仍继续一同探索未解的难题。"我们三个小时前刚一起吃了披萨，几乎整个过程都在聊数学，"施泰宁格告诉《Quanta》杂志。"我们就是这么做的。"

五年前，两人偶然看到了一个立方体穿过另一个的YouTube视频，并立刻被迷住了。他们开发了一种算法来搜索鲁珀特隧道，并很快确信某些形状是"Nopert"。在2021年的一篇论文中，他们推测斜方截半二十面体不具有鲁珀特性质。他们的这项工作，早于墨菲和格里默近期的探索，施泰宁格说，"我认为，这是第一个猜想可能存在不具备此性质的立体的研究。"

如果你想证明一个形状是"Nopert"，你必须排除两个形状所有可能朝向的鲁珀特隧道。每一种朝向都可以被写成一组旋转角度的集合。这组角度的集合可以被表示为更高维度"**参数空间**"中的一个点。

专业生动的解读

这一部分将我们带入了证明的核心腹地，介绍了两位主角——施泰宁格和尤尔科维奇，并引出了解决这个"无限可能性"问题的关键钥匙：**参数空间（Parameter Space）**。

首先，故事的两位主角并非传统意义上的全职数学教授，这本身就很有启发性。他们对数学的热爱超越了职业的界限，利用业余时间合作攻克世界级的难题。这生动地诠释了科学探索的本质——它源于纯粹的好奇心和智力上的享受。他们从一个YouTube科普视频中获得灵感，最终解决了困扰学界几个世纪的难题，这个经历本身就是一个传奇。

他们早期的工作，即在2021年就正式提出猜想，认为像斜方截半二十面体这样的"顽固分子"可能就是真正的"Nopert"，显示了他们深刻的洞察力。他们不仅"感觉"到，而且敢于在学术论文中"断言"，这需要巨大的勇气和扎实的初步研究作为支撑。

现在，让我们来 tackle 本报告中第一个，也是最关键的一个智力飞跃点：**参数空间**。这是一个从三维物理世界到高维抽象空间的认知升级，也是现代数学和物理学中解决复杂问题的标准操作。

我们可以用一个通俗的类比来理解它。想象一下，你在调试一台非常高级的音响，它有五个旋钮：音量（Volume）、低音（Bass）、高音（Treble）、左声道平衡（Left Balance）、右声道平衡（Right Balance）。每一个旋钮都可以从0调到100。

- 你选择的**一组特定设置**，比如（V=50, B=70, T=60, LB=45, RB=55），就对应了音响的一种**状态**。
- 所有这些旋钮的**所有可能设置的集合**，就构成了一个五维的"**参数空间**"。这个空间里的每一个点，都唯一对应着音响的一种声音状态。

现在回到鲁珀特问题。要确定隧道和待穿越物体之间的相对姿态，同样需要一组"旋钮"参数来描述。经过数学家的分析，这个姿态可以由**五个**独立的角度参数来完全确定：

1. 描述"洞口"方向的两个角度（类似地球上的经度和纬度）：θ_2, ϕ_2。
2. 描述"钉子"方向的两个角度：θ_1, ϕ_1。
3. "钉子"在"洞口"平面内的旋转角度：α。

因此，**每一个可能的穿越方案，都等价于这个五维参数空间中的一个点** $(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \alpha)$。而鲁珀特问题，就从一个棘手的几何问题，被**转化**为了一个清晰的分析问题：

在这个五维的参数空间中，是否存在任何一个点，使得在该点对应的姿态下，一个投影能够完全包含在另一个投影的内部？

这个转化的力量是巨大的。它把一个关于"移动实体"的、难以处理的无限问题，变成了一个关于"搜索点"的、可以用分析和计算工具来处理的无限问题。虽然仍然是无限的，但空间的结构变得清晰，为下一步的"天罗地网"式排查铺平了道路。

原文翻译

假设你为你的两个形状选择了一个朝向，计算机告诉你，第二个影子超出了第一个影子的边界。这就排除了参数空间中的一个点。但你或许可以排除远不止一个点。如果第二个影子超出的部分很明显，那么需要一个很大的改变才能让它移回到第一个影子内部。换句话说，你不仅可以排除你最初的朝向，还可以排除"附近"的朝向——即参数空间中的一整块点。施泰宁格和尤尔科维奇提出了一个他们称之为**全局定理**的结果，该结果精确地量化了在这种情况下你可以排除多大的一块区域。

通过测试许多不同的点，你有可能在参数空间中排除掉一块又一块的区域。

专业生动的解读

引入"参数空间"的概念后，研究者们就拥有了一张"犯罪地图"。地图上的每一个点都代表一个潜在的"作案手法"（一种穿越姿态)。他们的目标是证明这张地图上没有任何一个点是"可行"的。要检查地图上的每一个点是不可能的，因为点是无限多的。因此，他们需要一种更高效的策略，这就是**全局定理（Global Theorem）**发挥作用的地方。

全局定理的核心思想是**利用连续性进行"区域排除"**。我们可以将其比作一种"大规模排查"策略。

- **单点测试**：首先，在五维参数空间的"地图"上随机选择一个点 Ψ，这个点对应一组具体的角度。计算机可以立刻计算出在这个姿态下，两个投影是否满足包含关系。假设计算结果是"不满足"，并且"钉子"的投影 $\mathcal{P}$ 有一个顶点超出了"洞口"投影 $\mathcal{Q}$ 的边界，超出的距离为 d。
- **从点到块**：由于投影形状随角度的变化是连续的，直觉告诉我们，如果只对角度做一点点微小的改变（即在参数空间中从点 Ψ 移动到它附近的一个点 Ψ')，那个超出的顶点不会突然"跳"回边界内部。它仍然会处在边界之外，只是超出的距离可能稍有变化。
- **量化排除范围**：全局定理的精髓在于，它不只是一个模糊的直觉，而是一个**精确的数学公式**。它能够根据"超出距离 d"的大小，以及投影边界随角度变化的"敏感度"（即导数)，精确地计算出一个"安全半径 ϵ"。在这个以 Ψ 为中心、半径为 ϵ 的五维"小方块"内，所有的点（所有"附近"的姿态）都**保证**是不满足条件的。

因此，每当计算机测试一个点并发现一个"明显"的失败案例（即 d 较大)，全局定理就能帮助研究者们一次性地、带有数学确定性地排除掉参数空间中的一整个区域。他们的策略就是：不断地在尚未被排除的区域里选择新的测试点，然后像盖图章一样，用全局定理不断地盖上"无效区域"的章。他们的希望是，最终能用有限个这样的"图章"，将整个参数空间的地图完全覆盖，不留下一丝缝隙。

原文翻译

如果这些块覆盖了整个参数空间，你就证明了你的形状是一个"Nopert"。但是每个块的大小取决于第二个影子超出第一个影子的距离，而有时它并不会超出很远。例如，假设你开始时两个形状处于完全相同的位置，然后你将第二个形状轻微旋转。它的影子最多只会超出第一个影子一点点，所以全局定理

只能排除一个极小的盒子。这些盒子太小了，无法覆盖整个参数空间，留下了你可能错过的某个点对应于一个鲁珀特隧道的可能性。

为了处理这些微小的重新定向，这对搭档提出了一个补充其全局定理的工具，他们称之为**局部定理**。这个结果处理的是这样一种情况：你可以在原始影子的边界上找到三个满足某些特殊要求的顶点（或角点）。例如，如果你将这三个顶点连接成一个三角形，它必须包含影子的中心点。研究人员证明，如果这些要求得到满足，那么对形状的任何微小的重新定向，都会产生一个将这三个顶点中至少一个进一步向外推的影子。所以新的影子不能位于原始影子之内，这意味着它不会形成一个鲁珀特隧道。

专业生动的解读

全局定理虽然强大，但它有一个致命的"阿喀琉斯之踵"。当两个投影的姿态非常接近，特别是当它们几乎完全重合时，全局定理就失灵了。

想象一下，两个形状的姿态完全相同（即 $\theta_1 = \theta_2, \phi_1 = \phi_2, \alpha = 0$）。此时，"钉子"的投影和"洞口"的投影是完全一样的。它们没有相互"包含"，而是边界完全重合。在这种情况下，超出的距离 $d = 0$。如果你对"钉子"的态度做一个极其微小的扰动，它只会探出边界一丁点，这个 d 值会非常小。根据全局定理，一个微小的 d 只能排除一个微乎其微的参数空间区域 ϵ。用这种"微型图章"去覆盖广阔的参数空间，无异于杯水车薪，永远也盖不完。而这些恰恰是"最可疑"的区域，因为穿越最可能在两个投影形状最相似的时候发生。

为了攻克这些最坚固的堡垒，研究者们设计了一件"特种武器"——**局部定理（Local Theorem）**。它不再关注"超出多少"，而是转而分析投影轮廓在微小扰动下的**变化趋势**。

局部定理可以被理解为一种"精准狙击"策略，专门对付那些"几乎重合"的困难情况。它的工作原理如下：

1. **寻找关键哨兵**：首先，在一个投影轮廓上寻找三个特殊的"哨兵"顶点。这些顶点必须满足一些几何条件，其中最重要的一条是：由这三个顶点构成的三角形，必须把投影的几何中心"包"在里面。这保证了它们是轮廓上的关键支撑点，而不是偏安一隅的普通顶点。
2. **分析运动趋势**：局部定理通过精密的数学分析证明了一个深刻的性质：对于这样选出的三个"哨兵"顶点，当你对物体的三维姿态进行任何微小的扰动时，这三个顶点在二维投影中的位置会发生变化。但关键是，**它们不可能同时都向投影中心收缩**。必然有**至少一个**哨兵顶点会向外移动，或者保持不动。
3. **一票否决**：这个性质是致命的。要实现穿越，需要"钉子"的所有顶点都进入"洞口"的内部。这意味着"钉子"投影的所有边界点，包括那三个"哨兵"顶点，都必须向内收缩。而局部定理恰恰证明了这是不可能发生的。只要有一个哨兵顶点向外移动，穿越就不可能实现。

因此，局部定理就像一个极其灵敏的"警报器"。在那些全局定理无能为力的"零距离"接触点附近，只要能成功部署三个"哨兵"，局部定理就能保证，任何微小的风吹草动（姿态扰动）都会触发警报，从而排除掉整个附近区域的穿越可能性。

至此，施泰宁格和尤尔科维奇的"天罗地网"已经构建完毕：用**全局定理**进行大范围的"地毯式轰炸"，清除掉绝大部分"容易"的区域；然后用**局部定理**对剩下的、最顽固的"碉堡"进行"精准拔除"。理论工具已

经备齐，下一步就是找到一个合适的对象来应用这套强大的武器。

下面的表格清晰地总结了这套双管齐下的证明策略。

表格 3: "不可穿越体"的证明策略

步骤 (Step)	目标 (Objective)	使用工具/方法 (Tools/Methods)	挑战与解决方案
1. 问题转化	将三维物理问题转化为数学分析问题	**参数空间化 (Parameterization)**	**挑战:** 如何描述ㄋ $(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2,$
2. 空间简化	缩小需要搜索的参数空间范围	**利用对称性 (Symmetry)**	**挑战:** 五维空间大 利用"不可穿越体 将搜索范围缩小
3. 空间离散化	将无限连续的参数空间分割为有限个区域	**网格划分 (Partitioning)**	**挑战:** 仍有无限个 将简化后的空间
4. 区域排除	证明每个小方块内都不存在解	**全局定理 & 局部定理**	**挑战:** 如何高效排 **全局定理**处理投影 **局部定理**处理投影
5. 最终验证	确保所有区域都被完全覆盖且无遗漏	**计算机辅助证明**	**挑战:** 计算量巨大 用R语言快速生成 再用SageMath进

章节 2.4: "不可穿越体"的诞生与未来

原文翻译

如果你的形状投下的影子缺少三个合适的顶点，局部定理就无法应用。而所有之前被认定的"Nopert"候选者，都至少有一个影子存在这个问题。施泰宁格和尤尔科维奇筛选了数百个最对称、最美丽的凸多面体数据库，但他们找不到任何一个形状，其所有的影子都能满足要求。

于是他们决定自己来生成一个合适的形状。他们开发了一种算法来构建形状，并测试它们是否具有"三顶点性质"。最终，该算法产生了"不可穿越体"，它由150个三角形和两个正15边形构成。它看起来像一个圆胖的水晶花瓶，有着宽阔的底座和顶部；一位该作品的粉丝已经3D打印了一个复制品用作笔筒。

专业生动的解读

这一部分揭示了整个研究过程中最富创造性的一步，标志着研究思路从"**寻找**"到"**创造**"的根本性转变。

研究者们手握全局和局部两大定理这柄"屠龙之技"，却发现现有的"龙"（如斜方截半二十面体等"Nopert"候选者）的"鳞甲"构造特殊，导致局部定理这把最关键的武器无法施展。问题出在，这些高度对称的形状，在某些特定的投影角度下，其影子的轮廓上找不到满足局部定理条件的三个"哨兵"顶点。也许是顶点数量不够，也许是它们构成的三角形无法包含中心。这就好比狙击手已经就位，但目标躲在了无法被瞄准的掩体后面。

面对这个僵局，他们没有继续在已有的多面体中大海捞针，而是做出了一个极具魄力的决定：既然找不到合适的"靶子"，那就亲手**设计并制造**一个！

这个决策是整个研究的转折点。他们的目标不再是分析一个给定的形状，而是**构造**一个全新的形状，这个形状的每一个性质，尤其是它在所有角度下的投影性质，都必须"量身定做"，以完美地满足局部定理的应用条件。他们编写了一个算法，这个算法就像一个"基因工程师"，不断地尝试组合不同的顶点、棱和面，构建出新的多面体，然后立刻用他们设计的标准去"体检"这个新生命——检查它所有的投影是否都拥有"三顶点性质"。

经过无数次的尝试和优化，算法最终"进化"出了一个理想的产物——**不可穿越体（Noperthedron）**。这个几何体并非来自柏拉图或阿基米德的古典几何世界，它是一个彻头彻尾的现代造物，是为解决一个特定问题而生的"功能性"几何体。它由150个三角形和2个作为顶盖和底座的正十五边形组成，共有90个顶点和152个面。它的外形（像一个矮胖的水晶花瓶）是其内在数学性质的外在表现。它的"美"不在于经典的对称与和谐，而在于其严丝合缝的功能性——它存在的唯一目的，就是为了让那个精密的证明机器能够顺利运转。

从寻找一个反例，到最终自己动手创造一个反例，这体现了数学家从"自然观察者"到"宇宙构建者"的角色转变。他们不仅在发现宇宙中已有的数学规律，也在构建新的数学对象，以探索逻辑世界的更多可能性。

原文翻译

施泰宁格和尤尔科维奇随后将参数空间的方向划分为大约1800万个微小的块，并测试了每个块的中心点，看其对应的方向是否能产生一个鲁珀特通道。结果一个也没有。接下来，研究人员证明了每个块要么满足局部定理，要么满足全局定理，从而使他们能够排除整个块。由于这些块填满了整个参数空间，这意味着"不可穿越体"不存在鲁珀特通道。

"这个自然的猜想被证明是错误的，"奥罗克说。

数学家们是否能用新方法生成其他的"Nopert"，或者他们是否能找到一个不同的局部定理来处理像斜方截半二十面体这样的候选者，还有待观察。但现在数学家们知道了"Nopert"确实存在，"我们就能在坚实的基础上研究其他形状了，"墨菲说。

墨菲，像施泰宁格和尤尔科维奇一样，为了问题本身而去探索，独立于他的日常工作，他感觉自己与鲁珀特亲王跨越了几个世纪的共鸣。"我喜欢他选择用他的退休生活，在他的城堡里做数学和科学，"他说。

与此同时，施泰宁格和尤尔科维奇正在寻找新的问题来解决。"我们只是谦逊的数学家——我们热爱研究这样的问题，"施泰宁格说。"我们会继续这样做下去。"

专业生动的解读

在"创造"出完美的"靶子"——不可穿越体之后，剩下的就是执行那套已经设计好的、天罗地网式的证明流程。这一过程是现代计算机辅助证明的经典范例。

1. **离散化与测试**：他们将经过对称性约减后的五维参数空间，像切蛋糕一样，分割成了大约1800万个微小的五维"方块"。对于每一个小方块，他们选取其中心点作为一个代表性的姿态，进行测试。
2. **双重验证**：在测试中，他们首先检查是否可以应用全局定理。如果中心点对应的姿态导致投影"明显"超出边界，那么根据全局定理，整个小方块就可以被安全地排除。如果不行（通常意味着两个投影非常接近），他们就转而检查是否满足局部定理的条件。由于"不可穿越体"是为此量身定做的，它的所有投影都满足局部定理的要求。因此，每一个小方块，要么被全局定理排除，要么被局部定理排除。
3. **覆盖与终结**：通过计算机程序，他们系统性地验证了这1800万个小方块能够完全、无缝地覆盖整个参数空间。既然空间的每一寸土地都被证明是"不育"的，那么整个空间中自然就不可能存在任何一个"可行"的解。至此，大功告成：**"不可穿越体"被严格证明不具有鲁珀特性质**。

这个发现的意义是深远的。首先，它以一个无可辩驳的**反例**，终结了一个流传已久的猜想，为数学知识的大厦增添了一块确定的基石。其次，它展示了一套强大的、可复制的研究**方法**。未来，研究者们可以尝试将这套"参数空间分割 + 全局/局部定理"的方法应用于其他"顽固"的形状，比如那个悬而未决的斜方截半二十面体，看看能否证明它也是一个"Nopert"。甚至，他们可以尝试修改和泛化局部定理，使其能适用于更多类型的几何体。

最后，文章以一种温暖的人文主义情怀收尾。无论是业余探索者墨菲，还是"谦逊的数学家"施泰宁格和尤尔科维奇，他们与三百多年前的鲁珀特亲王一样，都是被纯粹的求知欲和智力挑战的乐趣所驱动。这提醒我们，无论研究工具如何从肉眼和直尺演变为超级计算机和复杂算法，探索未知、解决难题的这份人类精神，是永恒不变的。一个问题的解决，往往是下一个更迷人问题的开始。

为了让读者更直观地理解"不可穿越体"的构造，下表列出了其精确的数学定义，这可以被看作是创造这个独特形状的"基因代码"或"建筑蓝图"。

表格 4: "不可穿越体"的数学构造蓝图

构造元素 (Construction Element)	数学定义 (Mathematical Definition)
生成点 (Generator Points) C_1, C_2, C_3	$C_1 := \frac{1}{259375205}\begin{pmatrix}152024884\\0\\210152163\end{pmatrix}$ $C_2 := \frac{1}{10^{10}}\begin{pmatrix}6632738028\\6106948881\\3980949609\end{pmatrix}$ $C_3 := \frac{1}{10^{10}}\begin{pmatrix}8193990033\\5298215096\\1230614493\end{pmatrix}$
对称群 (Symmetry Group) C_{30}	$\mathcal{C}_{30} := \left\{(-1)^{\ell} R_z\left(\frac{2\pi k}{15}\right) : k = 0, \ldots, 14; \ell = 0, 1\right\}$ 其中 $R_z(\alpha)$ 是绕z轴旋转α角的矩阵: $R_z(\alpha) := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
顶点集合 (Vertex Set) NOP	$\mathbf{NOP} := \mathcal{C}_{30} \cdot C_1 \cup \mathcal{C}_{30} \cdot C_2 \cup \mathcal{C}_{30} \cdot C_3$ (即对三个生成点进行C_{30}群的所有变换)

第三部分：结论 —— 几何学的疆界与探索者的工具箱

从17世纪温莎城堡里的一场皇家赌局，到21世纪借助超级计算机完成的复杂证明，鲁珀特亲王的问题带领我们完成了一次跨越三百多年的智力长征。最终，"不可穿越体"（Noperthedron）的诞生，不仅为这个古老的问题画上了一个阶段性的句号，更深刻地揭示了现代数学探索的本质与范式。

这次探索的旅程，为我们带来了至少三个层面的核心启示：

第一，**直觉与严谨的永恒张力**。人类对几何的理解始于直觉——一个立方体似乎不可能穿过自身。然而，数学的进步恰恰在于它勇于挑战并超越直觉。沃利斯的证明告诉我们，直觉可能是错的。而"所有凸多面体都可穿越"这个新的"直觉"或猜想，又被"不可穿越体"的严格证明所推翻。这个过程完美地诠释了数学的二元性：它既需要天马行空的直觉和猜想来指引方向，又必须依靠毫厘不差的逻辑和证明来奠定基石。

第二，**抽象化的非凡力量**。面对一个拥有无限多种可能姿态的三维物理问题，直接解决是无望的。施泰宁格和尤尔科维奇的成功，关键在于他们将问题"升维"和"抽象化"。通过构建一个五维的"参数空间"，他们将一个具体的、动态的几何操作问题，转化为了一个静态的、在高维空间中寻找特定点的分析问题。这种将具体问题映射到抽象数学结构中去研究的思维方式，是现代科学的核心方法论之一，它使得我们能够用统一的框架去处理表面上千差万别的复杂系统。

第三，**理论与计算的深度融合**。如果说"参数空间"和"两大定理"是这场探索的"理论地图"，那么强大的计算能力就是不可或缺的"交通工具"。没有深刻的理论洞察，计算机将在无限的可能性中盲目搜索，一无所获；而没有计算机对1800万种情况进行不知疲倦的精确验证，再精妙的理论也只能停留在纸面上，无法最终完成证明。"不可穿越体"的证明，是人类智慧与机器算力协同作战的典范。它预示着未来的数学和科学发现，将越来越依赖于这种"理论家"与"计算科学家"的紧密合作。

对于站在知识前沿的高中生而言，这个故事不仅仅是一个有趣的几何谜题。它是一扇窗，透过它，我们可以窥见数学这门古老学科的现代面貌：它充满活力，不断有旧的猜想被推翻，新的领域被开辟；它是一门创造性的艺术，数学家不仅在发现，更在构建新的世界；它也是一门日益依赖交叉协作的科学，理论与实践、人脑与电脑的界限正在变得模糊。

鲁珀特亲王的问题或许已经有了一个答案，但探索的旅程远未结束。那个斜方截半二十面体是否也是"不可穿越体"？是否存在一个比拥有152个面的"不可穿越体"更简单的反例？这些新的问题，正等待着下一代充满好奇心和勇气的探索者，用他们手中的、或许是我们今天无法想象的全新工具箱，去继续拓展人类智慧的疆界。

Works cited

1. First Shape Found That Can't Pass Through Itself | Quanta Magazine, accessed on October 30, 2025, https://www.quantamagazine.org/first-shape-found-that-cant-pass-through-itself-20251024/
2. Prince Rupert's cube - Wikipedia, accessed on October 30, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Prince_Rupert%27s_cube
3. Projection | Perspective, Orthographic, Axonometric | Britannica, accessed on October 30, 2025, https://www.britannica.com/science/projection-geometry
4. Prince Rupert's cube - isn't the cube-of-the-same-size problem trivial?, accessed on October 30, 2025, https://math.stackexchange.com/questions/5104041/prince-ruperts-cube-isnt-the-cube-of-the-same-size-problem-trivial
5. Polyhedron - Wikipedia, accessed on October 30, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Polyhedron
6. Convex Polyhedrons - Cuemath, accessed on October 30, 2025, https://www.cuemath.com/geometry/convex-polyhedrons/
7. Triakis tetrahedron - Wikipedia, accessed on October 30, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Triakis_tetrahedron
8. Rhombicosidodecahedron - Wikipedia, accessed on October 30, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Rhombicosidodecahedron

9. First Shape Found That Can't Pass Through Itself - Slashdot, accessed on October 30, 2025, https://science.slashdot.org/story/25/10/27/1749229/first-shape-found-that-cant-pass-through-itself
10. The Triakis Tetrahedron - QF Box, accessed on October 30, 2025, https://www.qfbox.info/4d/inv_trunctet
11. Parameter space - Wikipedia, accessed on October 30, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Parameter_space
12. A convex polyhedron without Rupert's property - arXiv, accessed on October 30, 2025, https://www.arxiv.org/pdf/2508.18475
13. Literature Review: A convex polyhedron without Rupert's property - The Moonlight, accessed on October 30, 2025, https://www.themoonlight.io/en/review/a-convex-polyhedron-without-ruperts-property
14. New this week: A convex polyhedron that can't tunnel through itself - Reddit, accessed on October 30, 2025, https://www.reddit.com/r/math/comments/1n2rrzd/new_this_week_a_convex_polyhedron_that_cant/
15. John Carlos Baez: "This week Steininger and Yurke..." - Mathstodon.xyz, accessed on October 30, 2025, https://mathstodon.xyz/@johncarlosbaez/115105250242399160