

# 无所不在的张量：几何、信息与计算的统一框架

## 第一部分：张量的数学基础

张量是现代科学与工程的基础之一，它提供了一种普适的数学语言，用以描述从时空几何到量子态，再到人工智能模型中的复杂关系。然而，“张量”一词在不同学科中的使用方式差异巨大，有时甚至会引起混淆。为了构建一个坚实且统一的理解，我们必须首先回归其数学本源。本部分将从线性代数的基本概念出发，系统地解构张量的定义，阐明其作为抽象多重线性映射和具体多维数组的双重身份，并深入探讨协变与逆变这两个核心概念，它们是连接抽象理论与物理现实的桥梁。

### 第一节：从向量到张量——多重线性的语言

在深入张量的世界之前，我们必须首先建立其赖以存在的根基：向量空间、对偶空间以及线性这一核心概念。正是这些看似基础的元素，通过层层推广，最终构筑起张量理论的宏伟大厦。

#### 1.1. 向量空间、对偶空间与线性概念

向量空间是线性代数的核心研究对象。一个向量空间  $V$  是在一个域  $F$  (在物理学中通常是实数域  $R$  或复数域  $C$ ) 上定义的，其元素被称为向量。这些向量满足一套封闭的加法和标量乘法规则<sup>1</sup>。为了进行具体计算，我们通常会为向量空间选取一组

基，记作  $\{e_i\}$ 。基是一组线性无关的向量，空间中的任何其他向量  $v$  都可以唯一地表示为这组基向量的线性组合：

$$v = \sum_i v_i e_i$$

这里的标量系数  $v_i$  被称为向量  $v$  在基  $\{e_i\}$  下的分量<sup>2</sup>。这个表达式体现了线性代数的核心思想：将一个抽象的几何对象(向量  $v$ )分解为一组有序的数字(分量  $v_i$ )和一个固定的参考框架(基  $\{e_i\}$ )。

然而，仅仅拥有向量空间本身是不够的。为了完整地描述物理和几何关系，我们还需要引入一个与之对偶的概念：对偶向量空间，记作  $V^*$ <sup>3</sup>。

$V^*$  的定义可能初看起来有些抽象，但它在概念上至关重要。 $V^*$  是由所有从原向量空间  $V$  映射到其基础域  $F$  的线性泛函(linear functionals)所组成的集合<sup>1</sup>。换言之，

$V^*$  中的每一个元素，我们称之为余向量(covector)或对偶向量，本身就是一个函数，它“吃掉”一个向量并“吐出”一个标量。如果  $f$  是一个余向量( $f \in V^*$ )， $v$  是一个向量( $v \in V$ )，那么它们之间的作用表示为  $f(v)$ ，其结果是一个属于域  $F$  的标量。

这种对偶关系并非仅仅是数学家的游戏，它具有深刻的物理内涵。我们可以将向量  $v$  想象成一个客观存在的物理实体，比如一个位移或者一个速度。而余向量  $f$  则可以被看作是一种测量工具或一种度量方式。例如，一个场的梯度就是一个典型的余向量，它作用于一个位移向量上，给出的结果是该场在那个方向上的变化率(一个标量)。点积运算中的一部分也可以被看作是一个余向量：给定一个向量  $u$ ，操作  $u \cdot (\_)$  就是一个线性泛函，它等待另一个向量  $v$  来完成运算并产生标量  $u \cdot v$ 。

因此，向量空间  $V$  和其对偶空间  $V^*$  的出现，天然地在我们的数学框架中创造了一种二元对立：一类是“事物”本身(向量)，另一类是“测量事物”的工具(余向量)。这种区分是理解协变性(covariance)和逆变性(contravariance)的根本起点。正如向量空间  $V$  有一组基  $\{e_i\}$ ，其对偶空间  $V^*$  也存在一组与之对应的对偶基  $\{\phi_j\}$ 。这组对偶基的定义非常精妙，它要求基余向量  $\phi_j$  作用于基向量  $e_i$  上的结果满足：

$$\phi_j(e_i) = \delta_{ij}$$

其中  $\delta_{ij}$  是克罗内克(Kronecker)符号，当  $i=j$  时为 1，否则为 0<sup>4</sup>。这个定义确保了任何向量  $v = v_i e_i$  的分量  $v_j$  都可以通过对偶基的作用被“提取”出来： $\phi_j(v) = \phi_j(v_i e_i) = v_i \phi_j(e_i) = v_i \delta_{ij} = v_j$ 。同样地，任何余向量  $f = f_j \phi_j$  的分量  $f_i$  也可以通过作用于基向量来获得： $f(e_i) = f_j \phi_j(e_i) = f_j \delta_{ij} = f_i$ 。

## 1.2. 张量的双重面貌：不变的多重线性映射 vs. 基于分量的多维数组

关于张量的定义，存在两种看似不同但实则内在统一的观点，这两种观点分别在物理/工程领域和现代数学领域占据主导地位<sup>5</sup>。

观点一：作为多维数组的张量(物理学与工程学的视角)

在许多应用领域，尤其是在机器学习和工程计算中，张量被直观地定义为一个多维数组<sup>8</sup>。这个定

义是对我们熟悉的标量、向量和矩阵的自然推广：

- **0 阶张量(Rank-0 Tensor)**: 一个标量(一个单独的数字)。
- **1 阶张量(Rank-1 Tensor)**: 一个向量(一维数组)。
- **2 阶张量(Rank-2 Tensor)**: 一个矩阵(二维数组)。
- **n 阶张量(Rank-n Tensor)**: 一个需要 n 个索引来定位其元素的多维数组。

例如, 一个三维空间中的 2 阶张量  $T$  可以表示为一个  $3 \times 3$  的矩阵, 其分量为  $T_{ij}$ 。一个 3 阶张量则可以想象成一个“立方体”的数字, 其分量为  $T_{ijk}$ <sup>10</sup>。这个定义非常实用, 因为它直接与数据的存储和计算方式对应。然而, 这种定义有一个关键的附加条件: 当坐标系发生变换时, 张量的这些分量必须遵循特定的

变换法则<sup>6</sup>。一个任意的多维数组并不能被称为张量, 只有当其分量在坐标变换下表现出协变或逆变特性时, 它才具有张量的物理意义。

观点二: 作为多重线性映射的张量(现代数学的视角)

现代数学, 特别是微分几何, 提供了一个更深刻、更本质的定义: 一个张量是一个多重线性映射(multilinear map)<sup>3</sup>。这个定义是无坐标的(coordinate-free), 它描述的是一个内蕴的几何或物理对象, 其存在不依赖于我们选择何种坐标系来观察它。

具体来说, 一个类型为  $(r,s)$  的张量  $T$  是一个函数, 它接收  $r$  个向量(来自向量空间  $V$ )和  $s$  个余向量(来自对偶空间  $V^*$ )作为输入, 并输出一个标量(来自基础域  $F$ )<sup>3</sup>。这个映射在它的每一个输入参数上都是线性的。其数学形式为:

$$T: s \text{ 个 } V^* \times \dots \times V^* \times r \text{ 个 } V \times \dots \times V \rightarrow F$$

这里,  $r$  被称为张量的协变阶数(covariant order),  $s$  被称为逆变阶数(contravariant order)<sup>3</sup>。两种定义的统一

这两种定义之间的矛盾是表面的, 它们通过基的选择而联系在一起。抽象的“多重线性映射”是张量的本质, 而具体的“多维数组”则是这个映射在特定坐标系下的“投影”或“分量表示”。

这个统一过程可以分解为以下步骤:

1. 从抽象映射开始: 我们有一个不依赖于任何坐标系的张量  $T$ , 它是一个多重线性映射。
2. 选择一个坐标系: 为了进行计算, 我们必须为向量空间  $V$  选择一组基  $\{e_j\}$ , 并随之确定其对偶空间  $V^*$  的对偶基  $\{\phi_i\}$ 。
3. 计算分量: 张量  $T$  在这组基下的分量, 就是一个多维数组, 其值是通过将基向量和对偶基向量“喂给”张量映射得到的<sup>3</sup>。例如, 一个类型为  $(r,s)$  的张量, 其分量被定义为:

$$T_{j_1 \dots j_r i_1 \dots i_s} = T(\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_s}, e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$$

这些分量  $T_{j_1 \dots j_r i_1 \dots i_s}$  构成了我们之前所说的“多维数组”。

4. 坐标变换: 现在, 如果我们换一组新的基  $\{e^k\}$ , 这组新基可以通过一个变换矩阵  $R$  与旧基联系起来:  $e^k = \sum_j e^j R_{kj}$ 。
5. 推导变换法则: 由于张量  $T$  本身是多重线性的, 我们可以计算出它在新基下的分量  $T^{\wedge}$  与旧基下的分量  $T$  之间的关系。这个关系式恰好就是物理学定义中作为公理引入的“张量变换法则”。

因此, 我们看到, 分量的变换法则并不是一个需要额外记忆的武断规则。它是多重线性这个根本属性在坐标变换下的直接数学后果。多重线性映射是张量不变的灵魂, 而多维数组及其变换法则则是它在不同坐标系下的肉身。理解了这一点, 就抓住了张量概念的核心。

### 1.3. 协变与逆变: 定义张量的变换法则

协变(covariant)与逆变(contravariant)是描述张量分量在坐标基变换下如何行为的术语, 它们是张量分析的中心概念<sup>4</sup>。这两个术语的根源在于确保物理量本身的客观不变性。

考虑一个向量  $v$ , 它是一个客观存在的几何实体(比如一个从  $A$  点到  $B$  点的箭头)。我们可以在不同的坐标系中描述它。

- 在旧坐标系中, 基为  $\{e_i\}$ , 向量表示为  $v = \sum_i v_i e_i$ 。
- 在新坐标系中, 基为  $\{e^j\}$ , 向量表示为  $v = \sum_j v^j e^j$ 。

假设新旧基向量之间的关系为  $e^j = \sum_i e_i R_{ji}$ , 其中  $R$  是变换矩阵。为了保持向量  $v$  本身不变, 它的分量必须做出相应的“补偿性”变化。将基变换关系代入, 我们得到:

$$i \sum v_i e_i = j \sum v^j (\sum_i e_i R_{ji}) = i \sum e_i (j \sum R_{ji} v^j)$$

由于基向量  $\{e_i\}$  是线性无关的, 两边的系数必须相等, 即  $v_i = \sum_j R_{ji} v^j$ 。为了求出新分量  $v^j$ , 我们需要用  $R$  的逆矩阵  $R^{-1}$ :

$$v^j = i \sum (R^{-1})_{ij} v_i$$

我们观察到, 向量的分量  $v_i$  的变换矩阵是基向量变换矩阵的逆。这种“相反”的变换行为被称为逆变(contravariant), 其分量用上标(superscript)表示<sup>10</sup>。

现在考虑一个余向量(线性泛函)  $\alpha$ 。其分量是在对偶基  $\{\phi_j\}$  下的展开系数  $\alpha = \sum_j \alpha_j \phi_j$ 。对偶基的变换法则与原基的变换法则是相反的, 即  $\phi^k = \sum_j \phi_j (R^{-1})_{kj}$ 。为了保持余向量  $\alpha$  本身不变, 其分量必须与对偶基的变换方式相反, 也就是与原基的变换方式相同。经过类似的推导, 可以得到余向量分量的变换法则:

$$\alpha^k = j \sum \alpha_j R_{kj}$$

这种与基向量“协同”变化的变换行为被称为协变(covariant), 其分量用下标(subscript)表示<sup>10</sup>。

一个广义的类型为 (r,s) 的张量，拥有 s 个逆变指标和 r 个协变指标，它的分量变换法则是这两种变换的组合，每个指标都遵循各自的规则<sup>10</sup>：

$$T^{j_1' \dots j_r' i_1' \dots i_s'} = T^{j_1 \dots j_r i_1 \dots i_s} \Sigma(R-1)_{i_1 i_1'} \dots (R-1)_{i_s i_s'} T^{j_1' \dots j_r i_1' \dots i_s} R_{j_1 j_1'} \dots R_{j_r j_r'}$$

其中，带撇号的表示新坐标系下的分量。  
不变性是这一切的核心。一个标量(0 阶张量)在坐标变换下是不变的。而一个由余向量作用于向量得到的结果  $\alpha(v)=\Sigma i \alpha_i v^i$  也必须是一个不变的标量。我们可以验证这一点：

$$\sum_k \hat{\alpha}_k \hat{v}^k = \sum_k \left( \sum_j \alpha_j R^j_k \right) \left( \sum_i (R^{-1})^k_i v^i \right) = \sum_{\{i,j\}} \alpha_j v^i \left( \sum_k R^j_k (R^{-1})^k_i \right)$$
 括号中的项  $\sum_k R^j_k (R^{-1})^k_i$  正是矩阵  $R$  与其逆矩阵  $R^{-1}$  的乘积，结果是单位矩阵  $\delta^j_i$ 。因此：
$$\sum_k \hat{\alpha}_k \hat{v}^k = \sum_{\{i,j\}} \alpha_j v^i \delta^j_i = \sum_j \alpha_j v^j$$

这表明，尽管向量和余向量的分量都随着坐标系的改变而改变，但它们结合在一起产生的结果是客观不变的。协变与逆变的变换法则被精确地设计出来，以保证这种物理上的不变性<sup>4</sup>。指标的上标和下标不仅仅是排版约定，它们是编码了对象几何本质和变换行为的强大符号。  
为了更清晰地展示这些概念，下表总结了不同类型张量的变换法则。

表 1: 张量变换法则

| 对象类型           | 指标记法     | 变换法则 (从不带撇号的旧坐标系到带撇号的新坐标系)                                                             | 描述                                                                           |
|----------------|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| 标量 (0阶张量)      | $\phi$   | $\phi' = \phi$                                                                         | 在坐标变换下保持不变。                                                                  |
| 逆变向量 (1阶逆变张量)  | $v^i$    | $v^{i'} = \Sigma i \partial x_i \partial x_i' v^i$                                     | 分量的变换与基向量的变换相反。<br>$\partial x_i \partial x_i'$ 是逆变换矩阵 $(R^{-1})_{ii'}$ 的元素。 |
| 协变向量 (1阶协变张量)  | $w_j$    | $w^{j'} = \Sigma j \partial x_j' \partial x_j w_j$                                     | 分量的变换与基向量的变换相同。<br>$\partial x_j' \partial x_j$ 是变换矩阵 $R_{jj'}$ 的元素。         |
| 混合张量 (类型(1,1)) | $T_{ji}$ | $T^{j' i'} = \Sigma i, j \partial x_i \partial x_i' \partial x_j' \partial x_j T_{ji}$ | 每个指标都遵循其自身的协变或逆变                                                             |

|                |                                       |                                                                                                                                                                                                                                                       |                           |
|----------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
|                |                                       |                                                                                                                                                                                                                                                       | 变换法则。                     |
| 混合张量 (类型(s,r)) | $T_{j_1 \dots j_{r-1} i_1 \dots i_s}$ | $T'^{j_1 \dots j_{r-1} i_1 \dots i_s} = \sum (\prod_k \begin{matrix} 1 & s \\ \partial x_{ik} & \partial x_{ik'} \end{matrix}) (\prod_l \begin{matrix} 1 & r \\ \partial x_{jl'} & \partial x_{jl} \end{matrix}) T_{j_1 \dots j_{r-1} i_1 \dots i_s}$ | 逆变指标按逆变法则变换, 协变指标按协变法则变换。 |

注: 在广义坐标变换中, 变换矩阵的元素由坐标的偏导数给出。  $R_{kj} = \partial x^k / \partial x'^j$ ,  $(R^{-1})^{jk} = \partial x^j / \partial x'^k$ 。

### 1.4. 张量运算: 缩并、张量积与度规张量

掌握了张量的定义和变换性质后, 我们便可以介绍几种基本的张量运算, 这些运算构成了张量分析的“代数”。

#### 张量积 (Tensor Product)

张量积, 用符号  $\otimes$  表示, 是一种将两个或多个张量组合成一个更高阶张量的运算<sup>1</sup>。这是构建复杂张量的基本方式。例如, 给定两个向量

$v \in V$  和  $w \in W$ , 它们的张量积  $v \otimes w$  是一个属于张量积空间  $V \otimes W$  的 2 阶张量。如果  $V$  和  $W$  的维数分别是  $n$  和  $m$ , 那么  $V \otimes W$  的维数就是  $n \times m$ <sup>12</sup>。在分量上, 如果

$v$  的分量是  $v_i$ ,  $w$  的分量是  $w_j$ , 那么张量积  $(v \otimes w)$  的分量就是  $T_{ij} = v_i w_j$ 。这个运算也被称为外积 (outer product)。

#### 缩并 (Contraction)

缩并是张量分析中最核心的运算之一, 它通过对一个成对的逆变指标和协变指标求和来降低张量的阶数<sup>13</sup>。例如, 对于一个类型为

(1,1) 的张量  $T_{ji}$ , 对其进行缩并会得到一个标量 (0 阶张量):

$$\text{Tr}(T) = i \sum T_{ii}$$

这个操作等价于矩阵的迹 (trace)。更一般地, 对于一个类型为 (r,s) 的张量, 我们可以选择任意一个上标和一个下标进行缩并, 得到一个类型为 (r-1,s-1) 的新张量。例如, 对  $T_{lmijk}$  的第一个上标和第二个下标进行缩并, 得到  $S_{mjk} = \sum_i T_{imijk}$ 。  
我们熟悉的矩阵乘法实际上就是张量积和缩并的组合。两个矩阵  $A$  和  $B$  的乘积  $C = AB$ , 用张量分量表示为  $C_{ki} = \sum_j A_{ji} B_{kj}$ 。这可以看作是先对张量  $A_{ji}$  和  $B_{kj}$  做张量积得到一个 4 阶张量  $D_{jkij} = A_{ji} B_{kj}$ , 然后对中间的两个  $j$  指标进行缩并得到的<sup>13</sup>。

## 度规张量 (Metric Tensor)

在许多物理应用中，向量空间不仅具有线性结构，还具有几何结构，例如长度和角度的概念。这些几何概念由度规张量  $g$  引入<sup>15</sup>。度规张量是一个特殊的、对称的、非退化的 2 阶协变张量，记作

$g_{ij}$ 。它定义了向量空间上的内积 (inner product)，也就是我们熟知的点积：

$$v \cdot w = g(v, w) = g_{ij} v^i w^j$$

度规张量是描述空间几何性质的核心。在平直的欧几里得空间中，使用标准正交基时，度规张量的分量就是克罗内克符号  $g_{ij} = \delta_{ij}$ 。而在弯曲空间或使用非正交基时， $g_{ij}$  的分量则会变得复杂，并包含了空间所有的几何信息<sup>5</sup>。

## 升降指标 (Raising and Lowering Indices)

度规张量及其逆矩阵  $g^{ij}$  (定义为  $\sum_k g_{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$ ) 提供了一个至关重要的功能：在向量空间  $V$  和其偶空间  $V^*$  之间建立了一个规范的同构关系。这意味着我们可以使用度规张量将一个向量“转换”成一个余向量，反之亦然。这个操作在坐标分量上体现为升降指标<sup>4</sup>。

- 降低指标：将一个逆变向量  $v^j$  转换为一个协变向量  $v_i$ 。

$$v_i = g_{ij} v^j$$

- 提升指标：将一个协变向量  $w_j$  转换为一个逆变向量  $w^i$ 。

$$w^i = g^{ij} w_j$$

这个机制在广义相对论中无处不在，它允许我们在逆变分量和协变分量之间自由切换，极大地简化了张量方程的书写和计算<sup>18</sup>。例如，一个向量

$v$  可以用逆变分量  $v^i$  和基向量  $e_i$  表示，也可以用协变分量  $v_i$  和对偶基的对应物 (称为倒易基) 表示<sup>4</sup>。这两种表示描述的是同一个客观的几何向量，只是从不同的角度 (相对于基或相对于测量工具) 进行了分解。

## 第二部分：物理学中的张量——描述现实的结构

在建立了张量的数学基础之后，我们现在转向它在物理学中的具体应用。张量不仅仅是抽象的数学工具，它更是描述物理定律的自然语言。从爱因斯坦的引力理论到量子世界的诡异现象，张量无处不在，它以其固有的坐标无关性，确保了物理定律在所有观察者看来都具有相同的形式。本部分将探讨张量在广义相对论、电磁学和量子力学这三大物理学支柱中的核心作用。

## 第二节: 广义相对论——作为时空几何的张量

广义相对论是爱因斯坦的引力理论, 它彻底颠覆了牛顿将引力视为一种“力”的传统观念。在爱因斯坦的图景中, 引力不是力, 而是时空本身几何性质的体现: 物质和能量告诉时空如何弯曲, 而弯曲的时空则告诉物质如何运动<sup>2</sup>。描述这种动态、弯曲时空的语言, 正是张量分析。

### 2.1. 度规张量: 在弯曲时空中定义距离与因果关系

广义相对论的核心物理量是度规张量  $g_{\mu\nu}$ <sup>15</sup>。它是一个对称的  $4 \times 4$  矩阵, 其 10 个独立分量在时空中的每一点都有定义, 形成一个张量场。与我们在第一部分介绍的作为固定背景的度规不同, 广义相对论中的

$g_{\mu\nu}$  是一个动力学场, 它的具体形式由时空中物质和能量的分布决定, 并且是爱因斯坦场方程需要求解的未知量<sup>15</sup>。

度规张量的首要物理意义是定义了时空中两个无穷小分离事件之间的不变间隔 (invariant interval)  $ds^2$ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

这里我们使用了爱因斯坦求和约定, 即对成对出现的相同上下标进行求和<sup>2</sup>。

$dx^\mu$  是两个事件在时空坐标上的无穷小分离。这个间隔  $ds^2$  是一个标量, 意味着它的大小对于所有坐标系的观察者都是相同的, 这是狭义相对论基本假设的推广。

$ds^2$  的正负号决定了事件之间的因果关系:

- $ds^2 < 0$ : 类时间隔 (timelike interval)。两个事件之间可以存在因果联系, 一个有质量的物体可以从一个事件运动到另一个事件。此时,  $-ds^2/c^2$  就是物体自身所经历的固有时 (proper time)。
- $ds^2 > 0$ : 类空间隔 (spacelike interval)。两个事件之间不存在因果联系, 因为即使是光也无法在它们之间传播。 $ds^2$  代表了在特定参考系下同时测量的两个事件之间的固有距离 (proper distance)。
- $ds^2 = 0$ : 类光间隔 (lightlike interval)。只有光 (或其它无质量粒子) 才能沿着这样的路径传播。这定义了时空中的光锥 (light cone), 划分了每个事件的过去、未来和无法影响的“别处”。

因此, 度规张量  $g_{\mu\nu}$  就像是时空的“尺子和钟”, 它在每一点都规定了如何测量距离和时间, 从而构建了整个时空的因果结构<sup>16</sup>。在没有引力的平直闵可夫斯基时空中, 我们可以选择一个坐标系使得

$g_{\mu\nu}$  等于特殊的闵可夫斯基度规  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  (或符号相反的约定)。而在引力场存在时,

时空是弯曲的，我们无法在任何一个大的区域内找到一个坐标系使得  $g_{\mu\nu}$  处处等于  $\eta_{\mu\nu}$ 。

## 2.2. 联络与协变导数：作为非张量场的克里斯托费尔符号

在弯曲时空中，我们遇到了一个基本问题：如何比较不同点的向量？在平直空间中，我们可以直接平移一个向量而不改变它的方向。但在弯曲空间中，“方向”的概念本身就依赖于位置。例如，在地球表面（一个二维弯曲空间），一个指向“北”的向量从赤道平移到北极，其方向相对于当地的经线发生了改变。

为了解决这个问题，我们需要引入一种新的微分运算，即协变导数 (covariant derivative)，记作  $\nabla_\mu$ 。它推广了普通偏导数  $\partial_\mu$  的概念，使得对张量求导的结果仍然是一个张量<sup>21</sup>。对一个向量

$V^\nu$  的协变导数定义为：

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} V^\lambda$$

这里的  $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$  就是克里斯托费尔符号 (Christoffel symbols)，也称为仿射联络 (affine connection)<sup>21</sup>。它不是一个张量，而是一个描述基向量如何随位置变化的“修正项”。它可以完全由度规张量及其一阶导数计算得出<sup>22</sup>：

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\gamma g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\gamma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma})$$

克里斯托费尔符号不是张量，这一点至关重要。我们可以通过考察它在坐标变换下的行为来证明。一个类型为 (1,2) 的张量  $T^\alpha_{\beta\gamma}$  的变换法则是齐次的，只涉及雅可比矩阵及其逆矩阵的乘积。而克里斯托费尔符号的变换法则为<sup>24</sup>：

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\lambda}{\partial \tilde{x}^\gamma \partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\lambda}$$

变换法则中多出的第二项，即坐标变换的二阶导数项，是一个非齐次项。正是这个项的存在，破坏了张量的变换性质<sup>23</sup>。

克里斯托费尔符号的非张量性与爱因斯坦等效原理有着深刻的联系。等效原理指出，在时空中的任意一点，我们总可以找到一个局部惯性参考系（例如一个自由下落的电梯），在这个小区域内，引力的效应消失了，物理规律回归到狭义相对论的形式<sup>21</sup>。在数学上，这意味着我们可以在该点选择一个坐标系，使得度规张量

$g_{\mu\nu}$  等于闵可夫斯基度规  $\eta_{\mu\nu}$ ，并且其一阶导数为零<sup>22</sup>。由于克里斯托费尔符号的表达式只包含度规的一阶导数，因此在这个局部惯性系中，

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  的所有分量都为零<sup>29</sup>。

现在，我们有了一个可以在某个坐标系中为零，但在另一个坐标系中非零的量。而张量的一个基本性质是，如果它的所有分量在一个坐标系中为零，那么它在所有坐标系中都必须为零。因此，克

里斯托...

## Works cited

1. Tensor Product and Multilinear Maps - GitHub Pages, accessed on August 20, 2025, <https://rinterested.github.io/statistics/tensors3.html>
2. General Relativity/Printable version - Wikibooks, open books for an open world, accessed on August 20, 2025, [https://en.wikibooks.org/wiki/General\\_Relativity/Printable\\_version](https://en.wikibooks.org/wiki/General_Relativity/Printable_version)
3. Multilinear Mappings and Tensors, accessed on August 20, 2025, <https://cseweb.ucsd.edu/~gill/CILASite/Resources/15Chap11.pdf>
4. Covariance and contravariance of vectors - Wikipedia, accessed on August 20, 2025, [https://en.wikipedia.org/wiki/Covariance\\_and\\_contravariance\\_of\\_vectors](https://en.wikipedia.org/wiki/Covariance_and_contravariance_of_vectors)
5. 线性代数中国科学技术大学2023 春张量简介, accessed on August 20, 2025, <https://jbyang1987.github.io/Teaching/2023%20%E6%98%A5%20Linear%20Algebra/%E7%BA%BF%E6%80%A7%E4%BB%A3%E6%95%B0%202023.06.29%20%E5%BC%A0%E9%87%8F%E7%AE%80%E4%BB%8B.pdf>
6. 张量- 维基百科, 自由的百科全书 - Wikipedia, accessed on August 20, 2025, <https://zh.wikipedia.org/zh-cn/%E5%BC%B5%E9%87%8F>
7. 張量- 维基百科, 自由的百科全書, accessed on August 20, 2025, <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%BC%B5%E9%87%8F>
8. Tensor (machine learning) - Wikipedia, accessed on August 20, 2025, [https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor\\_\(machine\\_learning\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor_(machine_learning))
9. What is `Tensor` and how is it different from a vector? - Stack Overflow, accessed on August 20, 2025, <https://stackoverflow.com/questions/43656736/what-is-tensor-and-how-is-it-different-from-a-vector>
10. Tensor - Wikipedia, accessed on August 20, 2025, <https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor>
11. Tensors: Acting on Vectors vs Multilinear Maps - Mathematics Stack Exchange, accessed on August 20, 2025, <https://math.stackexchange.com/questions/164975/tensors-acting-on-vectors-vs-multilinear-maps>
12. Tensor product - Wikipedia, accessed on August 20, 2025, [https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor\\_product](https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor_product)
13. Journal Club: Brief Introduction to Tensor Network - Particle Theory, accessed on August 20, 2025, <https://theory.uchicago.edu/~ejm/course/JournalClub/tensornetwork.pdf>
14. Introduction to Tensor Networks, accessed on August 20, 2025, [https://archive.int.washington.edu/talks/WorkShops/int\\_21\\_1c/People/Evenbly\\_G/Evenbly.pdf](https://archive.int.washington.edu/talks/WorkShops/int_21_1c/People/Evenbly_G/Evenbly.pdf)
15. The Metric Tensor: A Complete Guide With Examples – Profound ..., accessed on August 20, 2025, <https://profoundphysics.com/metric-tensor-a-complete-guide-with-examples/>
16. Introduction to Tensors - Einstein Relatively Easy, accessed on August 20, 2025,

- [https://einsteinrelativelyeasy.com/index.php?option=com\\_content&view=article&id=54&catid=9](https://einsteinrelativelyeasy.com/index.php?option=com_content&view=article&id=54&catid=9)
17. How to prove the raising/lowering indices operation? - Physics Stack Exchange, accessed on August 20, 2025,  
<https://physics.stackexchange.com/questions/88118/how-to-prove-the-raising-lowering-indices-operation>
  18. Matrix notation and tensor representation | Piezoelectric Energy, accessed on August 20, 2025,  
<https://fiveable.me/piezoelectric-energy-harvesting/unit-4/matrix-notation-tensor-representation/study-guide/YxoPCnvmBKuKAEpF>
  19. special relativity - Confused by raising and lowering indices - Physics Stack Exchange, accessed on August 20, 2025,  
<https://physics.stackexchange.com/questions/338948/confused-by-raising-and-lowering-indices>
  20. Einstein field equations - Wikipedia, accessed on August 20, 2025,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_field\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations)
  21. The Einstein Field Equations, accessed on August 20, 2025,  
[https://spsweb.ftops.jpl.nasa.gov/portaldatops/mpg/MPG\\_Docs/Source%20Docs/Einstein%27s%20Field%20Equations.pdf](https://spsweb.ftops.jpl.nasa.gov/portaldatops/mpg/MPG_Docs/Source%20Docs/Einstein%27s%20Field%20Equations.pdf)
  22. Einstein tensor - Wikipedia, accessed on August 20, 2025,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_tensor](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_tensor)
  23. www.desy.de, accessed on August 20, 2025,  
[https://www.desy.de/~konstand/downloads/GR\\_2021/GR\\_L8.pdf](https://www.desy.de/~konstand/downloads/GR_2021/GR_L8.pdf)
  24. General Relativity Fall 2019 Homework 2 solutions, accessed on August 20, 2025,  
[https://cosmo.nyu.edu/yacine/teaching/GR\\_2019/homeworks/solution2.pdf](https://cosmo.nyu.edu/yacine/teaching/GR_2019/homeworks/solution2.pdf)
  25. differential geometry - Prove that Christoffel symbols transformation ..., accessed on August 20, 2025,  
<https://math.stackexchange.com/questions/248267/prove-that-christoffel-symbols-transformation-law-via-the-metric-tensor>
  26. On the definition of a tensor : r/math - Reddit, accessed on August 20, 2025,  
[https://www.reddit.com/r/math/comments/9spuct/on\\_the\\_definition\\_of\\_a\\_tensor/](https://www.reddit.com/r/math/comments/9spuct/on_the_definition_of_a_tensor/)
  27. B PART VII: Lec 9A THE CHRISTOFFEL SYMBOL IS NOT A TENSOR - YouTube, accessed on August 20, 2025, <https://www.youtube.com/watch?v=SCefJ6CUfOw>
  28. Einstein Field Equations: A Step-By-Step Derivation (Two Methods) - Profound Physics, accessed on August 20, 2025,  
<https://profoundphysics.com/derivation-of-einstein-field-equations/>
  29. xAct confusion between partial derivatives and curvatureless/torsionless covariant derivatives - Google Groups, accessed on August 20, 2025,  
<https://groups.google.com/g/xact/c/aluxZOmUC2g>