

一个无垠的世界：汉娜·开罗与对水烟-竹内猜想的证伪

第一部分：反例的构建者

第一节 神童之路

一项颠覆性的数学突破，其背后往往是一位有着非凡历程的思考者。汉娜·开罗(Hannah Cairo)的故事并非始于大学的讲堂，而是源自巴哈马群岛的家中，在那里，她开启了一段深刻的自学之旅¹。开罗约2007年出生于巴哈马首都拿骚，自幼便对数学展现出浓厚的兴趣¹。她的早期教育主要通过可汗学院(Khan Academy)等在线资源完成，11岁时便已学完微积分³。此后，她开始独立钻研抽象代数和数论等领域的研究生级别教科书，其学习进度之快，甚至让她的远程辅导教授感到自己“并非在真正地教她”，因为开罗主要是通过自主阅读和证明定理来吸收知识¹。

然而，这段智识上的飞速成长伴随着一种深刻的孤独感。开罗将她的家庭教育环境形容为“受限的”，充满了“无法摆脱的单调”，让她感到“非常孤立”³。正是在这种背景下，数学成为了她的避难所和精神寄托。她曾这样描述道：“数学是我可以探索的另一个世界。一个不受限制的世界，一个我随时可以通过思考进入的世界”³。这种独特的经历让她得以“用与众不同的方式看待数学”，培养了一种不受传统教学范式束缚的、独立的思维模式³。这种思维模式或许正是她日后能够挑战一个困扰学界数十年之久的猜想的关键。物理和社交上的孤立似乎催生了一个无限广阔的内在智识世界，这种矛盾的动态构成了她成长的核心。

2019冠状病毒病大流行意外地为开罗打开了一扇通往更广阔世界的窗户。由于旅行限制，她得以在线上参加著名的伯克利数学圈(Berkeley Math Circle, BMC)的暑期项目¹。14岁时，她在申请中列出的自学课程已相当于一个高等数学本科学位的内容，这立刻引起了项目组织者的注意³。她的卓越才华很快得到认可，项目主任甚至邀请她在后续的课程中担任教员——一个她欣然接受的角色¹。这一转变标志着她从一个知识的消费者迅速成长为知识的传播者和生产者，这种角色的转变对于一个青少年来说极为罕见，也预示了她未来在学术界的非凡潜力。随后，她的家庭移居美国，开罗在完成高中学业的同时，开始在加州大

学伯克利分校选修高等课程,正式踏入了顶尖学术研究的殿堂¹。

第二节 天才的生态系统:导师与学术机构

任何天才的成长都离不开一个能够识别、培养并支持其发展的生态系统。汉娜·开罗的成功,是其个人天赋与一系列关键人物及机构协同作用的典范。

2.1. 导师:张瑞祥教授

在开罗的学术道路上,加州大学伯克利分校的助理教授张瑞祥(Ruixiang Zhang)扮演了至关重要的角色⁵。张教授本人就是一位杰出的数学家,专攻欧几里得调和与分析、解析数论和加性组合学等领域,并且也曾是一位数学神童,获得过国际数学奥林匹克(IMO)金牌⁵。他的学术背景同样显赫,师从菲尔兹奖得主彼得·萨纳克(Peter Sarnak)⁵。这段经历使他对如何引导和理解早慧的学生有着深刻的洞察。

两人的相遇源于开罗主动出击。她通过电子邮件联系了张教授及其他几位教授,请求旁听他们的研究生课程¹。张教授之所以同意,并非看重她的履历,而是被她的热情所打动:“汉娜非常专注,而且似乎对这个课题充满热情。单是这种态度就足够了”³。这种基于热情而非资历的指导哲学,为开罗提供了进入前沿研究领域的机会。

张教授的指导方式是严谨而深刻的。他将水烟-竹内猜想作为一个选做的作业题目引入课堂,为开罗提供了接触这一难题的契机²。当开罗开始构建她的反例时,张教授成为了她第一个、也是最关键的“批评者”。开罗回忆道:“我花了一段时间才说服张瑞祥……我的方案确实是正确的”²。这种严谨的验证过程,而非一味的鼓励,确保了其最终成果的无懈可击。这段师生关系呈现出一种理想的共生状态:导师提供了问题、环境和严格的学术标准,而学生则带来了颠覆性的新视角,共同完成了一项重大的科学突破⁹。

2.2. 孵化器:伯克利数学圈(BMC)

伯克利数学圈(BMC)是开罗从自学者走向学术社区的关键桥梁。BMC成立于1998年,旨在复制东欧国家成功的数学圈模式,为有天赋的学生提供超越常规课程的挑战¹¹。它不仅是一个学习场所,更是一个天才的发现与培养中心。在其历史上,BMC培养了众多杰出的数

学人才，如埃文·奥多尼(Evan O'Dorney)、加布里埃尔·卡罗尔(Gabriel Carroll)和刘天凯(Tiankai Liu)，他们在国际数学奥林匹克竞赛和普特南数学竞赛等顶级赛事中屡获殊荣¹¹。

开罗的加入，再次证明了BMC作为人才孵化器的作用。她在这里找到了一个由“热爱数学的同龄人”组成的社群，这对于此前长期处于孤立状态的她而言至关重要¹²。更重要的是，BMC为她提供了从高中走向大学研究的直接通道。BMC的创始人、伯克利数学家兹维兹达·斯坦科娃(Zvezdelina Stankova)亲自鼓励开罗参加伯克利的研究生课程³。在BMC的官方人员名单上，开罗的身份被列为“学生与讲师”，这清晰地体现了她在该社群中的双重角色⁴。

2.3. 舞台：埃斯科里亚尔会议

如果说伯克利是开罗思想的诞生地，那么在西班牙埃斯科里亚尔(El Escorial)举办的“第12届国际调和分析与偏微分方程会议”则是她成果的首次正式亮相¹³。这个历史悠久的会议是调和分析领域的顶级盛会，汇集了世界各地的专家学者¹⁶。

对于开罗而言，这是她的第一次国际学术旅行²。在这次会议上，她不仅向领域内的顶尖专家们展示了她的研究成果，也正式宣告了自己作为一名研究者的身份。她对这次经历的描述充满了喜悦：“能和其他热爱数学的人待在一起，是一次非常美妙的经历”²。这一事件标志着她被国际数学界正式接纳。

开罗的经历清晰地展示了一条现代天才的成长路径：从一个像BMC这样的精英社群开始，通过大学的开放注册项目进入高等研究，在一位关键导师的指引下接触到前沿问题，利用arXiv这样的预印本服务器迅速传播成果，最终在国际顶级会议上获得同行的认可。这是一个由多个机构无缝衔接、共同作用的加速系统²。

第二部分：数学大厦

第三节 波的语言：调和分析导论

要理解汉娜·开罗的突破，首先必须了解其所在的数学领域——调和分析。这个领域的核心

思想, 最早由约瑟夫·傅里叶(Joseph Fourier)在19世纪提出, 即任何复杂的函数或信号, 原则上都可以被分解成一系列更简单的、基本的波(如正弦波和余弦波)的叠加¹。这个概念可以用一个直观的类比来理解: 一个复杂的和弦可以被分解成其组成的基本音符及其泛音¹⁹。

实现这种分解的数学工具被称为傅里叶变换(Fourier Transform)。它能够将一个函数从其原始的“时间域”或“空间域”转换到一个新的“频率域”表示¹⁹。在频率域中, 我们可以清晰地看到原始函数由哪些频率的波构成, 以及每种频率的强度。

3.1. 傅里叶限制性问题

调和和分析中一个深刻而基本的问题是傅里叶限制性问题(Fourier Restriction Problem), 由数学家埃利亚斯·斯坦(Elias Stein)在20世纪70年代提出²¹。该问题探讨的是: 一个函数的傅里叶变换, 能否被有意义地“限制”到一个特定的、通常是零测度的几何曲面上(例如球面)?²⁰。

这个问题的技术难点在于, 对于一个普通的 L^2 函数(平方可积函数), 其傅里叶变换也只是一个 L^2 函数, 它只在“几乎处处”有定义。这意味着它在任何一个零测度集合(如球面)上的取值是无从谈起的²⁰。然而, 费弗曼(Fefferman)和斯坦等人的研究发现了一个惊人的事实: 如果这个曲面具有“曲率”, 那么对于某些函数而言, 这种限制就是有意义的²⁰。曲率的存在防止了构成函数的波以一种“扁平”或琐碎的方式相互干涉, 从而赋予了函数在曲面上的结构。

这个看似抽象的理论实际上是现代信息社会的基石。从信号处理(如音频降噪和图像滤波)到数据压缩(如MP3和JPEG格式), 再到医学成像(如核磁共振MRI和计算机断层扫描CT), 调和和分析的应用无处不在¹。傅里叶限制性问题, 从根本上说, 是在探索一个函数的光滑性与其频率分布的几何形状之间的深层联系。它揭示了频率空间的几何结构如何强有力地制约着物理空间中函数的形态。

第四节 一个四十年的问题: 水畑-竹内猜想

在调和和分析的宏伟版图中, 水畑-竹内猜想(Mizohata-Takeuchi Conjecture)占据了一个特殊的位置。它由日本数学家水畑滋(S. Mizohata)和竹内襄(J. Takeuchi)于20世纪80年代提出, 其最初的动机源于对某些偏微分方程(PDE), 特别是薛定谔方程的一阶微扰问题的

适定性研究¹。

4.1. 猜想的表述与内涵

水畑-竹内猜想是一种“加权”的限制性估计。它不仅关心函数的大小，更关心其能量在空间中的分布模式。该猜想可以用一个不等式来精确表述。令 E 为延拓算子， f 为定义在某个曲面 Σ 上的函数， $w(x)$ 为空间中的一个非负“权重函数”。该猜想断言：

$$\int_{\mathbb{R}^d} |E f(x)|^2 w(x) dx \leq \|Xw\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2(\Sigma; d\sigma)}$$

其中， $\|Xw\|_{L^\infty}$ 是权重函数 w 的X射线变换(X-ray transform)的上确界范数，它测量的是 w 沿着空间中所有直线的积分的最大值²⁸。

从概念上讲，这个猜想是在说：一个由特定曲面上的频率构成的波函数，其能量不能在空间中以一种与直线高度对齐的方式过度集中²。如果一个区域的权重函数

w 沿着某条线特别大，那么波函数的能量在该区域内就必须受到相应的限制。它关注的不是函数值的大小(level sets)，而是这些值在空间中的“形状”(shape)²⁷。

4.2. 重要性及其与其他猜想的关联

在长达四十年的时间里，水畑-竹内猜想被数学界普遍认为是正确的，如果得证，它将自动解决该领域内其他几个悬而未决的重要问题¹。它的重要性体现在其与调和分析中其他核心猜想的紧密联系上。

为了清晰地展示这些复杂的关联，下表梳理了几个关键猜想及其相互关系：

猜想名称	简化表述	主要动机	开罗之前状态	开罗工作的影响
Tomas-Stein限制性猜想	$\ Ef\ _{L^q} \leq C \ f\ _{L^p}$ 对特定对成立。询问到曲面的限制是否良好。	限制性理论的基础。	已证明。	无直接影响，但提供了背景。

Takeya猜想	关于包含所有方向线段的集合的大小。	与限制性理论、数论有深刻联系。	大部分已证明(在 $\mathbb{R}^d$ 中由Bourgain/Guth/Katz证明)。	通过Stein猜想间接相关。开罗的工作不直接影响它,但属于同一智识领域。
Stein猜想	一个更普适的加权L2估计。	一条通过Takeya猜想证明限制性猜想的潜在路径。	开放, 被广泛研究。	被证伪(无 ϵ 损失版本), 因为它蕴含了M-T猜想 ³¹ 。
水畑-竹内(M-T)猜想	$\int$	Ef	$\sup_{C \subset \mathbb{R}^n} \int_C f dx \leq C \ f\ _{L^2}$ 。询问level set的形状/集中度。	PDE适定性(薛定谔方程)。
多线性限制性猜想	端点版本研究多个延拓算子乘积的行为。	调和分析, PDE。	已证明, 但有 ϵ 损失。	M-T猜想曾是消除 ϵ 损失的希望。开罗的工作表明此路不通 ²⁸ 。

这个猜想之所以能吸引数学家们数十年的关注, 部分原因在于其数学表述的“优美”和简洁。爱丁堡大学的数学家托尼·卡伯里(Tony Carbery)曾表示, 他有时会觉得这个猜想“因为它表述得如此简单和优雅,最终必然是真的”³。这种审美上的吸引力, 加上其在理论上的巨大潜在价值, 共同构筑了一种强大的智识偏见, 使得学界倾向于相信其真实性。而开罗, 作为一名初涉此领域的学生, 没有背负这四十年的历史包袱。当她发现证明的道路异常艰难时, 她能够更自由地转换思路, 从一个全新的角度审视问题, 这或许正是她能取得突破的心理优势之一。

第五节 解构突破: 反例的诞生

汉娜·开罗的贡献核心在于她成功地构建了一个反例——一个具体的数学对象, 它违反了水畑-竹内猜想的普适性论断。

5.1. 从证明到证伪的转折

开罗的探索过程并非一帆风顺。她最初花费了数月时间，试图去证明这个猜想¹。然而，正是这一过程中的重重困难，点燃了她思想的火花。她回忆道：“在尝试证明这个结果数月后，我终于理解了它为何如此困难。我意识到，如果我能正确地利用这些信息，我或许可以推翻这个论断”²。这是一个关键的智识飞跃：将“困难”从障碍转变为线索。她果断地改变了策略，从寻找证据转向构建一个反例¹。

5.2. 构造：分形、格点与对数损失

开罗的论文标题直截了当——《一个对水畑-竹内猜想的反例》(A Counterexample to the Mizohata-Takeuchi Conjecture)¹⁸。其核心思想是构造一个特定的函数

f 和一个特定的权重函数 w ，当它们被代入水畑-竹内不等式时，不等式的左边会比右边“更大”，从而证伪该猜想。

为了实现这一目标，开罗运用了包括分形几何在内的多种高等数学工具¹。著名数学家陶哲轩(Terence Tao)指出，她的反例“集中在一个格点附近”³¹。这表明其构造具有高度精巧的几何结构。

她的结果不仅证明了猜想是错误的，还精确地量化了其“错误”的程度。她发现，该猜想的失败存在一个“logR损失”(log R-loss)¹⁸。这是一个极其精妙的结论。它意味着不等式并非完全失效，只是在

R 趋于无穷大时，左边会比右边多出一个缓慢增长的对数因子。更重要的是，她的反例具有普适性，它对任何不完全是平面的二次连续(C2)超曲面都有效，这使其成为一个非常强大和普遍的证伪¹⁸。

这个“logR损失”的发现，揭示了水畑-竹内猜想背后直觉的深刻之处。它表明，该猜想在很大程度上是“几乎正确”的，其失败发生在一种非常微妙的对数尺度上。这也解释了为何四十年来无人能将其证伪——因为反例是如此精巧，难以被直接观察到。开罗的工作并没有简单地终结一个研究方向，反而使其更加精确。它直接引出了一个新的、更精细的问题：一个带有“ ϵ 损失”的修正版猜想是否仍然成立？³¹。她不仅回答了一个老问题，更开启了一片新的研究领域。

第三部分：余波与广泛共鸣

第六节 池中涟漪:对调和分析领域的影响

汉娜·开罗的发现如同一块巨石投入平静的池塘,在调和分析领域激起了层层涟漪。其影响不仅在于解决了一个长期存在的问题,更在于它改变了该领域的研究格局。

6.1. 学界的反应:震惊与赞赏

当开罗的论文于2025年2月10日发布在预印本网站arXiv上时,数学界的第一反应是“震惊”和“欣喜”³。英国伯明翰大学的伊塔马尔·奥利维拉(Itamar Oliveira)曾花费两年时间试图证明该猜想,他坦言:“我们都惊呆了,绝对的。我不记得见过这样的事情”³。整个学界对这一新进展报以“热情和惊讶”,这既是针对结果本身,也是因为其作者竟是一位尚未完成高中学业的17岁少年²。在Reddit的数学论坛上,专业数学家们也证实了这项工作的分量,称其为“真正的研究级别的东西”,而非一个“可爱的小旁支问题”³⁵。

6.2. 多米诺骨牌效应:对相关猜想的影响

如前所述,证伪水烟-竹内猜想带来了一系列连锁反应。

首先,因为它被一个更普适的斯坦猜想(Stein's Conjecture)所蕴含,所以开罗的工作也直接证伪了(无 ϵ 损失版本的)斯坦猜想[31,32]。其次,它关闭了一条备受期待的研究路径。数学家们曾希望利用水烟-竹内猜想来移除多线性限制性猜想端点估计中的 R^ϵ 损失。开罗的论文明确指出,“端点多线性限制性估计不能直接通过水烟-竹内猜想来加强”¹⁸。陶哲轩也注意到了这一重要影响¹。这意味着,研究这些问题的数学家们现在必须寻找全新的方法。

6.3. 新问题,新方向

在数学中,一个有力的反例往往比一个证明更具生产力。它不仅是破坏性的,更是建设性的。开罗的成果完美地诠释了这一点。一个证明或许能确认现有的世界观,而她的反例则彻

底动摇了数学家们关于波函数行为的传统直觉³。它迫使整个领域重新评估其基本假设，并提供了一个必须被任何未来理论所解释的新对象——即她构造的函数

f 和权重 w 。

最直接的结果是，它催生了新的、更精确的猜想，即带有“ ϵ 损失”的修正版水畑-竹内猜想是否成立³¹。此外，她所使用的基于格点和分形结构的构造方法，也为测试调和分析中其他加权估计问题提供了一类全新的范例。因此，她的工作非但没有终结一个领域，反而为其注入了新的活力，迫使研究者们再次成为未知领域的探索者。

第七节 公众的想象：神童、难题与媒体

当一个高度专业化的科学突破进入公众视野时，它往往会被重塑为一则更易于理解和传播的文化叙事。汉娜·开罗的故事也不例外，它在科学界之外引发了关于天才、教育、性别和创造力的广泛讨论。

7.1. 媒体叙事：局外人天才

主流媒体，如《Quanta Magazine》、《国家报》(El País)和Medium等，在报道中普遍采用了“局外人天才”的叙事框架¹。报道标题和内容反复强调“17岁少女”、“高中生”和“神童”等标签，将故事塑造成一个“大卫战胜歌利亚”式的传奇¹。这种叙事无疑是引人入胜的，但有时也可能掩盖了其工作的实质性内容。一位Reddit用户就曾批评《Quanta》杂志试图讲述的这种“局外人取得惊人成果的模板化故事”³⁶。

7.2. STEM领域的性别、创造力与审美

开罗的故事在另一个意想不到的场域引发了热议。在Reddit的r/WitchesVsPatriarchy(一个女权主义倾向的社区)板块，用户们热烈讨论了开罗在学术报告中使用的演示文稿风格³⁵。她选用了粉色和绿色的配色方案，这被许多评论者视为对“数学是男性化的、缺乏创造力的”这一刻板印象的有力反击³⁵。一位用户写道：“小时候，我常被告知‘你很有创造力，所以你数学不会好’”，并表示开罗的工作让她备受鼓舞³⁵。这个例子生动地展示了开罗的故事

如何在文化层面上挑战并重塑了人们对科学与性别关系的认知。

7.3. 神童的社会化

与此同时，在更为专业的r/math(数学)板块，讨论则转向了一个更为严肃和深刻的话题：天才儿童的社会化与心理健康¹²。许多评论者分享了自己或他人因过早进入大学而面临社交困难、错失“发展里程碑”的亲身经历¹²。他们对开罗的未来表示了担忧。

然而，这些担忧需要与开罗自己的经历进行对照。她曾坦言早年的孤立，但也描述了在伯克利找到同龄人社群后，感觉生活“充满了可能性”的喜悦³。这呈现了一个更为复杂的画面：虽然加速教育存在风险，但对于像开罗这样因智力超前而感到孤立的个体而言，进入一个能够理解和接纳她的高水平环境，可能恰恰是实现健康社会化的关键一步。

汉娜·开罗的故事因此呈现出一种双重叙事结构。在科学界内部，这是一个关于 $\log R$ 损失、斯坦猜想和精巧数学构造的技术故事²⁸。而在公众领域，这是一个关于年轻神童、STEM领域的女性和孤僻天才的文化故事¹。这两条叙事线并行不悖，相互关联。正是她的个人经历(文化叙事)为技术突破(科学叙事)创造了条件；反过来，这项突破又催生了一个能够激励未来一代数学家的强大文化符号。

第八节 结论：新问题，新视野

汉娜·开罗对水畑-竹内猜想的证伪，是多种因素交汇的产物。它源于个人的天赋、坚韧不拔的心理素质，以及在孤立中孕育出的独特思维方式³。同时，它也离不开一个能够识别、培养并严格要求她的学术生态系统——包括一位慧眼识珠的导师、一个充满活力的数学社群和一所顶尖的研究型大学²。最终，是她敢于挑战既定信念的智识勇气，让她完成了这最后的飞跃²。

这项成就不仅为一个长达四十年的问题画上了句号，更为调和与分析领域开启了新的篇章。它迫使研究者们放弃旧的路径，去探索更精细的理论，去理解由开罗揭示出的、更为复杂的数学现实³¹。

对于开罗本人而言，这仅仅是她学术生涯的开端。她已被马里兰大学的博士项目录取，即将以异乎寻常的年龄开启她的研究生涯²。回顾数学史上其他一些早慧的天才，如陶哲轩和彼得·舒尔策(Peter Scholze)，人们有理由期待开罗在未来做出更多根本性的贡献³⁷。她的故事雄辩地证明，最深刻的洞见可能来自最意想不到的角落，尤其来自一个将数学视为一个

“无垠的世界”的头脑。

Works cited

1. A 17-Year-Old's Breakthrough Shakes Up Mathematics | by S-Ag3 Store - Medium, accessed on August 3, 2025, <https://medium.com/@ingartsq2/a-17-year-olds-breakthrough-shakes-up-mathematics-b9d625177b8a>
2. A 17-year-old teen refutes a mathematical conjecture proposed 40 years ago | Science, accessed on August 3, 2025, <https://english.elpais.com/science-tech/2025-07-01/a-17-year-old-teen-refutes-a-mathematical-conjecture-proposed-40-years-ago.html>
3. At 17, Hannah Cairo Solved a Major Math Mystery | Quanta Magazine, accessed on August 3, 2025, <https://www.quantamagazine.org/at-17-hannah-cairo-solved-a-major-math-mystery-20250801/>
4. People | Berkeley Math Circle, accessed on August 3, 2025, <https://mathcircle.berkeley.edu/people>
5. Ruixiang Zhang - Wikipedia, accessed on August 3, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Ruixiang_Zhang
6. Ruixiang Zhang - UC Berkeley Research, accessed on August 3, 2025, <https://vcresearch.berkeley.edu/faculty/ruixiang-zhang>
7. Ruixiang Zhang | Department of Mathematics - Berkeley Math, accessed on August 3, 2025, <https://math.berkeley.edu/people/faculty/ruixiang-zhang>
8. Ruixiang Zhang - Google Sites, accessed on August 3, 2025, <https://sites.google.com/view/ruixiang-zhang/home>
9. VIII.6 Advice to a Young Mathematician I. Sir Michael Atiyah, accessed on August 3, 2025, https://assets.press.princeton.edu/releases/gowers/gowers_VIII_6.pdf
10. The Science of Mentoring Relationships: What Is Mentorship? - NCBI, accessed on August 3, 2025, <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK552775/>
11. Program | Berkeley Math Circle, accessed on August 3, 2025, <https://mathcircle.berkeley.edu/program>
12. 17 yo Hannah Cairo finds counterexample to Mizohata-Takeuchi conjecture : r/math - Reddit, accessed on August 3, 2025, https://www.reddit.com/r/math/comments/1ltm2sv/17_yo_hannah_cairo_finds_counterexample_to/
13. 12th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial, June 9-13, 2025. | Mitchell Taylor, accessed on August 3, 2025, <https://mitchtaylor.math.ca/12th-international-conference-on-harmonic-analysis-and-partial-differential-equations-el-escorial-june-9-13-2025/>
14. El Escorial, Madrid, 9-13 June 2025 - 12th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, accessed on August 3, 2025, <https://www.icmat.es/congresos/2025/Escorial/information.php>
15. 12th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential

- Equations, accessed on August 3, 2025,
<https://www.icmat.es/congresos/2025/Escorial/>
16. 8th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, June 16–20, 2008, El Escorial, Madrid, Spain – Bates College – Ex Libris, accessed on August 3, 2025,
https://bates.alma.exlibrisgroup.com/discovery/fulldisplay?docid=alma991005855976708044&context=L&vid=01CBB_BCOLL:BATES&lang=en&adaptor=Local%20Search%20Engine&tab=MyInst_and_CI&query=sub%2Cexact%2C%20Harmonic%20analysis%20%2CAND&mode=advanced&offset=30
 17. Conferences – davide barbieri, accessed on August 3, 2025,
<https://sites.google.com/view/davidebarbieri/research/conferences>
 18. [2502.06137] A Counterexample to the Mizohata-Takeuchi Conjecture – arXiv, accessed on August 3, 2025, <https://arxiv.org/abs/2502.06137>
 19. Fourier transform – Wikipedia, accessed on August 3, 2025,
https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform
 20. SOME NOTES ON RESTRICTION THEORY Contents 1. The restriction problem, accessed on August 3, 2025,
<http://www.iaa.tu-bs.de/konmerz/ws2324/ha/material/NotesOnRestriction.pdf>
 21. 247B, Notes 1: Restriction theory | What's new – Terence Tao, accessed on August 3, 2025,
<https://terrytao.wordpress.com/2020/03/29/247b-notes-1-restriction-theory/>
 22. SOME NOTES ON RESTRICTION THEORY Contents 1. The restriction problem, accessed on August 3, 2025,
<http://www.iaa.tu-bs.de/konmerz/ss21/fr/material/NotesOnRestriction.pdf>
 23. Applied Harmonic Analysis – Number Analytics, accessed on August 3, 2025,
<https://www.numberanalytics.com/blog/applied-harmonic-analysis>
 24. Revolutionize Medical Imaging with Image Signal Processing – Regami Solutions, accessed on August 3, 2025,
<https://www.regami.solutions/post/image-signal-processing-clearer-medical-images>
 25. Fourier Series and Harmonic Motion: Real-World Applications of, accessed on August 3, 2025, <https://yedu.ca/mod/book/view.php?id=1429&chapterid=1934>
 26. Applied Harmonic Analysis, Massive Data Sets, Machine Learning, and Signal Processing, accessed on August 3, 2025,
<https://www.birs.ca/cmo-workshops/2019/19w5061/report19w5061.pdf>
 27. Random Constructions for Sharp Estimates of Mizohata-Takeuchi Type – ResearchGate, accessed on August 3, 2025,
https://www.researchgate.net/publication/392514003_Random_Constructions_for_Sharp_Estimates_of_Mizohata-Takeuchi_Type
 28. A Counterexample to the Mizohata-Takeuchi Conjecture, accessed on August 3, 2025, <https://arxiv.org/pdf/2502.06137>
 29. DIFFERENT PERSPECTIVES ON THE MIZOHATA-TAKEUCHI ..., accessed on August 3, 2025, <https://theses.bham.ac.uk/id/eprint/15634/1/Ferrante2024PhD.pdf>
 30. Some small progress on the Mizohata-Takeuchi conjecture – Institute for Advanced Study, accessed on August 3, 2025,

- <https://www.ias.edu/video/some-small-progress-mizohata-takeuchi-conjecture>
31. theHigherGeometer: "@tao 🧐" - Mathstodon.xyz, accessed on August 3, 2025, <https://mathstodon.xyz/@highergeometer/114004472701350489>
 32. Terence Tao: "Some progress in restriction t..." - Mathstodon.xyz, accessed on August 3, 2025, <https://mathstodon.xyz/@tao/114003793236630744>
 33. A Counterexample to the Mizohata-Takeuchi Conjecture - arXiv, accessed on August 3, 2025, <https://arxiv.org/html/2502.06137v2>
 34. Random Constructions for Sharp Estimates of Mizohata-Takeuchi Type - arXiv, accessed on August 3, 2025, <https://www.arxiv.org/pdf/2506.05624>
 35. Hannah Cairo (17) has solved the Mizohata-Takeuchi conjecture and this was her very girly presentation of the results : r/WitchesVsPatriarchy - Reddit, accessed on August 3, 2025, https://www.reddit.com/r/WitchesVsPatriarchy/comments/1lu5goc/hannah_cairo_17_has_solved_the_mizohatatakeuchi/
 36. At 17, Hannah Cairo Solved a Major Math Mystery | Quanta Magazine - Kevin Hartnett | After finding the homeschooling life confining, the teen petitioned her way into a graduate class at Berkeley, where she ended up disproving a 40-year-old conjecture - Reddit, accessed on August 3, 2025, https://www.reddit.com/r/math/comments/1mff10j/at_17_hannah_cairo_solved_a_major_math_mystery/
 37. Peter Scholze - Wikipedia, accessed on August 3, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Scholze
 38. Brilliant vs Genius | Delightful & Distinctive COLRS - WordPress.com, accessed on August 3, 2025, <https://ddcolrs.wordpress.com/2023/01/22/brilliant-vs-genius/>
 39. How extraordinary is Terrence Tao? : r/math - Reddit, accessed on August 3, 2025, https://www.reddit.com/r/math/comments/1jt5d0c/how_extraordinary_is_terrence_tao/
 40. Examples of top academics who weren't prodigies [closed] - Academia Stack Exchange, accessed on August 3, 2025, <https://academia.stackexchange.com/questions/137712/examples-of-top-academics-who-werent-prodigies>